MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
JUNIO 2019
OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)
Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camiseta lisa necesita 70 g de algodón y 20 g de poliéster y cada camiseta estampada 60 g de algodón y 10 g de poliéster. La empresa dispone para ello de 4200 g de algodón y 800 g de poliéster. Para que sea rentable fabricar al menos 10 estampadas y además, el doble de las estampadas debe ser al menos al número de lisas. Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 euros y cada estampada 4 euros, ¿cuantas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿cuál es ese beneficio?

Solución:

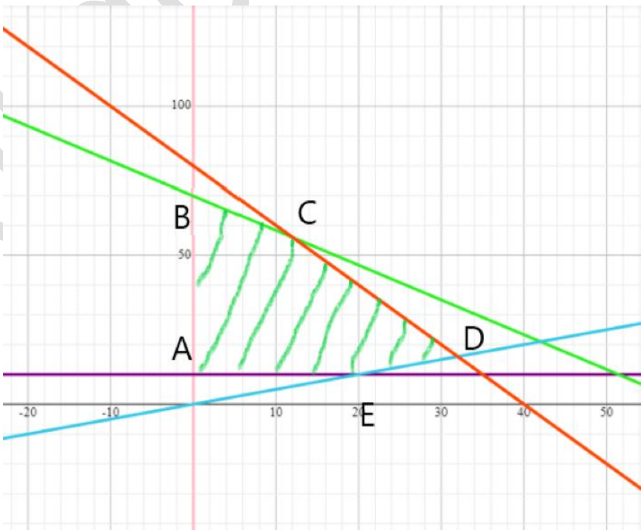
Llamaremos:

X=camisetas lisas

Y=camisetas estampadas

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 10 \\ 70x + 60y \leq 4200 \\ 2y \geq x \\ 20x + 10y \leq 800 \end{cases} \qquad f(x) = 5x + 4y$$

Sabiendo que todas las restricciones tienen forma de recta bastará con determinar dos puntos de cada restricción para determinar dichas rectas y poder representarlas.



Para obtener los puntos A, B, C, D y E debemos de determinar las intersecciones entre cada par de rectas.

$$punto\ A \begin{cases} x = 0 \\ y = 10 \end{cases} \Rightarrow A(0,10)$$

$$punto\ B\begin{cases} x = 0 \\ 70x + 60y = 4200 \end{cases} \Rightarrow B(0{,}70)$$

$$punto\ C\begin{cases} 20x + 10y = 800 \\ 70x + 60y = 4200 \end{cases} \Rightarrow B(12{,}56)$$

$$punto\ D\begin{cases} 20x + 10y = 800 \\ 2y = x \end{cases} \Rightarrow B(32{,}16)$$

$$punto\ E\begin{cases} y = 10 \\ 2y = x \end{cases} \Rightarrow B(20{,}10)$$

Una vez obtenidos los puntos A, B, C, D y E debemos saber en cuál de ellos se obtiene el beneficio máximo. Para ello basta con sustituir en f(x) las coordenadas de los puntos y el mayor valor de f(x) será nuestra solución.

$$f(x, y) = 5 \cdot x + 4 \cdot y$$

$$f(A) = 5 \cdot (0) + 4 \cdot (10) = 40$$

$$f(B) = 5 \cdot (0) + 4 \cdot (70) = 280$$

$$f(C) = 5 \cdot (12) + 4 \cdot (56) = 284$$

$$f(D) = 5 \cdot (32) + 4 \cdot (16) = 228$$

$$f(E) = 5 \cdot (20) + 4 \cdot (10) = 140$$

Para obtener el máximo beneficio se debe fabricar 12 camisetas lisas y 56 estampadas, siendo este de 284 €.

Ejercicio 2. **Calificación máxima (2,5 puntos)**

Se considera la función $f(x) = x^3 - 9x + 2$.

a) (1 punto) Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función que sean paralelas a la recta $y = 3x - 3$

b) (1punto) Estudie la monotonía y la curvatura de la función f.

c) (0,5 puntos) Calcule $\int f(x)dx$

Solución:

a) Para que dos funciones tengan la misma pendiente basta con que sus derivadas sean iguales, así que:

$$f'(x) = (3x - 3)'$$

$$f'(x) = 3x^2 - 9 = 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

La ecuación de la recta tangente tiene la expresión:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Basta con sustituir para ambos valores de x y así obtenemos las dos posibles rectas tangentes.

Para $x_1 = -2$

$$y - 12 = 3(x - 2) \Rightarrow y = 3x + 18$$

Para $x_2 = 2$

$$y - (-8) = 3(x - 2) \Rightarrow y = 3x - 14$$

b) Monotonía

$$f'(x) = 3x^2 - 9 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -\sqrt{3} \\ x_2 = \sqrt{3} \end{matrix}$$

Estudiamos el signo en cada intervalo

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente	Decreciente	Creciente

f(x) es creciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ y decreciente en $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

- Curvatura

$f''^{(x)} = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

Estudiamos el signo en cada intervalo

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f''(x)$	+	-
$f(x)$	Cóncava(∪)	Convexa(∩)

c) $\int f(x)dx = \int (x^3 - 9x + 2)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2} + 3x + C$

<u>Ejercicio 3.</u> (Calificación máxima 2,5 puntos)

El 65% de los turistas que visitan una provincia elige alojamiento en la capital y el resto en zonas rurales. Además, el 75% de los turistas que se hospedan en la capital y el 15% de los que se hospedan en zonas rurales, lo hacen en hoteles, mientas que el resto lo hace en apartamentos turísticos. Se elige al azar un turista de los que se han alojado en esa provincia.

a) (1,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en un hotel?

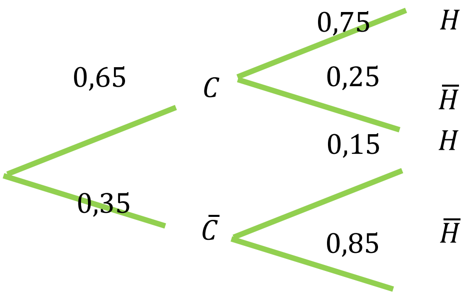
b) (1 Punto) Si se sabe que se ha hospedado en un apartamento turístico ¿cuál es la probabilidad de que el apartamento esté en zonas rurales?

Solución:

a) Llamaremos:

$turistas\ alojados\ en\ la\ capital = C$ $\qquad$ $Hospedados\ en\ hotel = H$

$turistas\ alojados\ en\ zonas\ rurales = \bar{C}$ $\qquad$ $Hospedados\ en\ apartamento = \bar{H}$



a) $P(H) = 0{,}65 \cdot 0{,}75 + 0{,}35 \cdot 0{,}15 = 0{,}54$

b) $P\left(\frac{\bar{C}}{\bar{H}}\right) = \frac{P(\bar{C}\cap\bar{H})}{P(\bar{H})} = \frac{0{,}35\cdot 0{,}85}{1-0{,}54} = 0{,}6467$

<u>Ejercicio 4.</u> **(Calificación máxima 2,5 puntos)**

Se desea estimar la proporción de individuos que piensan votar a un cierto partido político en una determinada ciudad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 300 individuos de la ciudad, resultando que 135 piensan votar a ese partido.

a) (1,5 puntos). Calcule un intervalo de confianza al 97% para la proporción de individuos que piensan votar a ese partido en dicha ciudad.

b) (1punto). Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestra para estimar la proporción con un error inferior al 2%.

Solución:

a) $p = \frac{135}{300} = 0{,}45 \qquad q = 1 - p = 0{,}55$

$$1 - {}^{\alpha}/_{2} = 1 - \frac{1-0{,}97}{2} = 0{,}985 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}17$$

$$I_C = \left(p - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\,; p + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right)$$

$$I_C = \left(0{,}45 - 2{,}17\sqrt{\frac{0{,}45\cdot 0{,}55}{300}}\,; 0{,}45 + 2{,}17\sqrt{\frac{0{,}45\cdot 0{,}55}{300}}\right) = (0{,}3877; 0{,}5123)$$

b) $\varepsilon = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}$

$$0{,}02 = 2{,}17\sqrt{\frac{0{,}45\cdot 0{,}55}{n}} \Longrightarrow n = \frac{0{,}45\cdot 0{,}55}{\left({}^{0{,}02}/_{2{,}17}\right)^2} = 2913{,}6 \approx 2914$$