mundoestudiante
métodoBarbeito

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
JUNIO 2019
OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Se considera la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Se pide:

a) (0,5 puntos). Razone si la matriz A es simétrica

b) (1 punto). Calcule A^{-1}

c) (1 punto).Resuelva la ecuación matricial $2X \cdot A - A^2 - 3I_3 = 0$

Solución:

a) La matriz A es simétrica si $A = A^t$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Como} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{la matriz no es simétrica}$$

b) Utilizamos la expresión que nos determina la matriz inversa $A^{-1} = \frac{adj\,(A)^T}{|A|}$ y calculamos cada término.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 0 - 0 + 1 - 4 = -1$$

$$adj\,(A) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad adj\,(A)^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Primero debemos despejar la X de la ecuación

$$2X \cdot A - A^2 - 3I_3 = 0 \Longrightarrow 2X \cdot A = A^2 + 3I_3 \Longrightarrow 2X = (A^2 + 3I_3) \cdot A^{-1} \Longrightarrow$$
$$X = \frac{1}{2}(A^2 + 3I_3) \cdot A^{-1} \Longrightarrow \frac{1}{2}(A + 3 \cdot A^{-1})$$

Una vez despejada la X sustituimos las matrices por sus valores y calculamos.

$$X = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$1/2\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}\right) = 1/2\begin{pmatrix} -8 & -8 & -6 \\ -8 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -3 \\ -4 & -1/2 & -2 \\ 3 & 2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. Calificación máxima (2,5 puntos)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & si\ x < 0 \\ x^2 + a & si\ x \geq 0 \end{cases}$

a) (1punto) Determine el valor del parámetro a para que f sea continua en todo su dominio. Para ese valor de a, estudie su derivabilidad.

b) (1,5 puntos). Para a=-2, estudie la monotonía y curvatura de la función f ¿Tiene algún punto de inflexión?

Solución:

a) Para que la función sea continua se debe de cumplir lo siguiente:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0-1} = -1 \\ \\ f(0) = x^2 + a = 0^2 + a \\ \\ \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{0-1} = -1 \end{array}\right\} \quad a = -1$$

b) Ahora vamos a estudiar la monotonía y curvatura de la función. Para ello debemos calcular $f'(x)$ para estudiar la monotonía y $f''(x)$ para estudiar la curvatura.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-1)^2} & si\ x < 0 \\ 2x & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Vamos a igualar a cero cada tramo para poder calcular la monotonía.

$$\frac{-1}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow no\ tiene\ solución.$$

$$2x = 0 \Longrightarrow 0$$

A continuación, estudiamos el signo de la derivada. Con ello determinaremos si la función es creciente o decreciente en cada intervalo.

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	Decreciente	Creciente

Hacemos lo mismo para la curvatura, pero en este caso con la segunda derivada.

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x-1)^3} & si\ x < 0 \\ 2 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Cuidado: el primer tramo de la función de la segunda derivada se anula en x=1, pero este punto ya pertenece al segundo tramo, ya que es mayor que 0 y por lo tanto no se tiene en cuenta. A sí que:

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	Convexa(∩)	Cóncava(∪)

Ejercicio 3. (Calificación máxima 2,5 puntos)
El 69% de los habitantes de una determinada ciudad ven series, el 35% películas y el 18% no ven ni series ni películas. Se elige al azar un habitante de la ciudad.
a) (0,75 puntos). Calcule a probabilidad de que vea series o películas.
b) (1punto). Sabiendo que ve series, calcule la probabilidad de que vea películas.
c) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que vea series y no vea películas?

Solución:

Llamaremos:
$S = habitantes\ que\ ven\ series$
$\bar{S} = habitantes\ que\ NO\ ven\ series$
$P = habitantes\ que\ ven\ películas$
$\bar{P} = habitantes\ que\ NO\ ven\ películas$
$P(S) = 0{,}69 \quad P(P) = 0{,}35 \quad P(\bar{S} \cap \bar{P}) = 0{,}18$

a) Aplicando la primera ley de Morgan

$$P(\bar{P} \cap \bar{S}) = \overline{P(S \cup P)} = 1 - P(S \cup P) \Rightarrow 0{,}18 = 1 - P(S \cup P) \Rightarrow P(S \cup P) = 0{,}82$$

b) Para calcular la probabilidad de P condicionado a S debemos usar la siguiente expresión:

$$P(P/_S) = \frac{P(S \cap P)}{P(S)} = \frac{0{,}22}{0{,}69} = 0{,}319$$

Pero previamente debemos calcular $P(S \cap P)$ mediante la expresión:

$$P(S \cup P) = P(S) + P(P) - P(S \cap P) \Rightarrow 0{,}82 = 0{,}69 + 0{,}35 - P(S \cap P) \Rightarrow P(S \cap P) = 0{,}22$$

Y ahora si

$$(P/_S) = \frac{P(S \cap P)}{P(S)} = \frac{0{,}22}{0{,}69} = 0{,}319$$

c) $P(P \cap \bar{S}) = P(P) - P(S \cap P) = 0{,}35 - 0{,}22 = 0{,}13$

Ejercicio 4. (Calificación máxima 2,5 puntos)
Los directivos de una empresa desean estimar el tiempo medio que tardan los empleados en llegar al puesto de trabajo desde sus domicilios. Admitimos que dicho tiempo sigue una distribución normal de desviación típica 8 minutos. Se elige al azar una muestra de 9 empleados de esa empresa, obteniéndose los siguientes resultados, expresados en minutos:

10 17 8 27 6 9 32 5 21

a) Determine un intervalo de confianza al 92% para la media poblacional.

b) Con una confianza del 95,5% ¿Qué tamaño muestral mínimo sería necesario para estimar el tiempo medio con un error inferior a 1,5 minutos?

Solución:

a) En primer lugar, debemos calcular la media muestral.

$$\mu = \frac{10+17+8+27+6+9+32+5+21}{9} = 15$$

Ahora basta con introducir los datos en la siguiente expresión que determina el intervalo de confianza. Pero primero debemos calcular ${}^{\alpha}/_{2}$.

$$\alpha/_2 = \frac{1+0{,}92}{2}$$

$z\alpha/_2$ lo podemos sacar de la tabla de distribución normal (0,1)

$$z\alpha/_2 = 1{,}755$$

$$I.C. = \left(\mu - z\alpha/_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \mu + z\alpha/_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \left(15 - 1{,}755 \cdot \frac{8}{\sqrt{9}};\ 15 + 1{,}755 \cdot \frac{8}{\sqrt{9}}\right) =$$

$$I.C = (10{,}32; 19{,}68)$$

b) Debemos calcular el nuevo $z\alpha/_2$ de la misma forma que en el apartado anterior.

$$\alpha/_2 = \frac{1+0{,}955}{2} = 0{,}9775 \Rightarrow z\alpha/_2 = 2{,}005$$

Sabiendo el error podemos calcular el tamaño de la muestra necesaria.

$$E = z\alpha/_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1{,}5 = 2{,}005 \cdot \frac{8}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = 114{,}3 \approx 115\ personas$$