mundoestudiante
métodoBarbeito

MATEMÁTICAS II
JUNIO 2019
OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)
Considera la función f(x) definida por:

$$\mathrm{f(x)} = \frac{x^2+3x+4}{2x+2} \quad para\ x \neq -1$$

Se pide:
a) (1,5 puntos) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica f(x).
b) (1 punto) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x).

Solución:

a) Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x+4}{2x+2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{2x}{x^2}+\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}{\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}} = \frac{1+\frac{3}{-\infty}+\frac{4}{(-\infty)^2}}{\frac{2}{-\infty}+\frac{2}{(-\infty)^2}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+4}{2x+2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{2x}{x^2}+\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}{\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}} = \frac{1+\frac{3}{\infty}+\frac{4}{\infty^2}}{\frac{2}{\infty}+\frac{2}{\infty^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Por lo tanto, no existen asíntotas horizontales

Asíntotas verticales:
Como: dom f(x)= $\mathbb{R}-\{-1\}$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+3x+4}{2x+2} = \infty \Longrightarrow Existe\ asíntota\ vertical$$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2+3x+4}{2x+2} = \frac{2}{0^+} = \infty$$

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2+3x+4}{2x+2} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

Asíntota oblicua
Al no existir asíntota horizontal, puede existir asíntota oblicua y debemos estudiarlo.
Dicha asíntota tendrá la forma y=mx +n. Siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2+3x+4}{2x+2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x+4}{2x^2+2x} = \frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x+4}{2x+2}-\frac{1}{2}x = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+4}{2x+2} = 1$$

Tendremos asíntota oblicua con la expresión:

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

b) Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento debemos de estudiar el signo de la derivada de f(x).

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 4x - 2}{(2x+2)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{2} \\ x = -1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

	$(-\infty, -1-\sqrt{2})$	$(-1-\sqrt{2}, -1)$	$(-1, -1+\sqrt{2})$	$(-1+\sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	Creciente	Decreciente	Decreciente	Creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1-\sqrt{2}) \cup (-1+\sqrt{2}, \infty)$ y decreciente en $(-1-\sqrt{2}, -1) U(-1, -1+\sqrt{2})$.

<u>Ejercicio 2</u>. Calificación máxima (2,5 puntos)

Sea la función $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$ .Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (1,1). (Sugerencia: cambio de variable $t = e^x$)

Solución:

Aplicando el cambio de variable sugerido

$$t = e^x \to dx = \frac{dt}{t} \to \int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx = \int \frac{1+t}{t(1-t)} dt$$

$$\frac{1+t}{t(1-t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} = \frac{A(1-t) + Bt}{t(1-t)}$$

$$1 + t = A(1-t) + Bt$$

Para t=1 B=2

Para t=0 A=1

$$\int \frac{1+t}{t(1-t)} dt = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{1-t}\right) dt = \ln|t| - 2\ln|1-t| + c \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

A continuación, deshacemos el cambio de variable.

$$\ln|t| - 2\ln|1-t| + c = \ln|e^x| - 2\ln|1-e^x| + c \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

Por último, determinamos la primitiva que pasa por el punto (1,1)

$$1 = \ln|e^1| - 2\ln|1 - e^1| + c \Rightarrow 1 = 1 - 2\ \ln|1 - e| + c \Rightarrow c = 2\ \ln|1 - e|$$

$$F(x) = x - 2\ln|1 - e^x| + 2\ln|1 - e|$$

<u>Ejercicio 3.</u> (Calificación máxima 2,5 puntos)

Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que a+d=1, tienen determinante 1 y cumplen A X=X A, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

Imponemos la condición A X=X A

$$A\,X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$X\,A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$$

Igualando los términos de la matriz obtenemos:

$$\begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases}$$

Ahora aplicamos la condición $a + d = 1 \Rightarrow a + a = 1 \Rightarrow a = d = 1/2$

Por lo que nos queda la expresión $X = \begin{pmatrix} 1/2 & -c \\ c & 1/2 \end{pmatrix}$

A continuación, imponemos la condición que el determinante es igual a 1

$$|X| = \begin{vmatrix} 1/2 & -c \\ c & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + c^2 \Rightarrow \frac{1}{4} + c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 \end{pmatrix}$$

<u>Ejercicio 4.</u> (Calificación máxima 2,5 puntos)

Considera la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1 \equiv x = 0\ y\ \pi_2 \equiv y = 0$

a) **(1,25 puntos) Halla los puntos de la recta r que equidista de los planos $\pi_1\ y\ \pi_2$**
b) **(1,25 puntos) Determina la posición relativa de la recta r y la recta intersección de los planos $\pi_1\ y\ \pi_2$.**

Solución:

a) Vamos a buscar los puntos de la recta r que cumplen la condición distancia(P, π_1)=distancia(P, π_2). Pasamos la recta r a forma paramétrica

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

por lo que los puntos de la recta son de la forma P $(2\text{-}\lambda, 2 + 3\lambda, 1 + \lambda)$
A continuación, imponemos la condición anterior. distancia(P, π_1)=distancia(P, π_2)

$$dist(P, \pi_1) = \frac{|2 - \lambda + 0 + 0 + 0|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = |2 - \lambda|$$

$$dist(P, \pi_2) = \frac{|0 + 2 + 3\lambda + 0 + 0|}{\sqrt{+0^2 + 1^2 + 0^2}} = |2 + 3\lambda|$$

$$|2 - \lambda| = |2 + 3\lambda| \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

$$P_1 = (2,2,1) \ \ y \ \ P_2 = (4, -4, -1)$$

b) Llamaremos s a la recta intersección de los dos planos. $s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Siendo en forma paramétrica

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases} para\ \alpha \in \mathbb{R}, por\ tanto\ \overrightarrow{V_s} = (0,0,1)\ P_s = (0,0,0)$$

Llamaremos M $= (\overrightarrow{V_r}\ \overrightarrow{V_s})\ y\ M^* = (\overrightarrow{V_r}\ \overrightarrow{V_s}\ \overrightarrow{P_r P_s})$

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (2,2,1) - (0,0,0) = (2,2,1) \Rightarrow M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\ M^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Rango\ de\ M: \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow rango(M) = 2 \neq 0 \rightarrow r\ y\ s\ se\ contan\ o\ se\ cruzan$$

Como $\overrightarrow{V_r} \neq \lambda \overrightarrow{V_s}$ no son paralelas

$$Rango\ de\ M^*: \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \Rightarrow rango(M^*) = 3 \rightarrow se\ cruzan$$