mundoestudiante
métodoBarbeito

MATEMÁTICAS II
JUNIO 2019
OPCIÓN B

<u>Ejercicio 1.</u> (Calificación máxima: 2,5 puntos)
Considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-a)e^x$

a) (1,25 puntos) Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en x=0.
b) (1,25 puntos) Para a=1, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f(x).

Solución:

a) Para que x=0 sea un punto crítico debe cumplir la condición $f'(0) = 0$

$$f'(x) = e^x + (x-a)e^x = (x-a+1)e^x$$
$$f'(0) = 0 \Rightarrow (0-a+1)e^0 = 0 \Rightarrow a = 1$$

b) Para determinar los puntos de inflexión debemos de imponer $f''(x) = 0$ y la condición del enunciado de a=1

$$f''(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x \Rightarrow (x+1)e^x = 0 \Rightarrow x = -1$$

A continuación estudiamos el signo de $f''(x)$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$f''(x)$	-	+

Como cambia de signo $f''(x)$en x=-1 podemos determinar que existe un punto de inflexión en dicho punto.

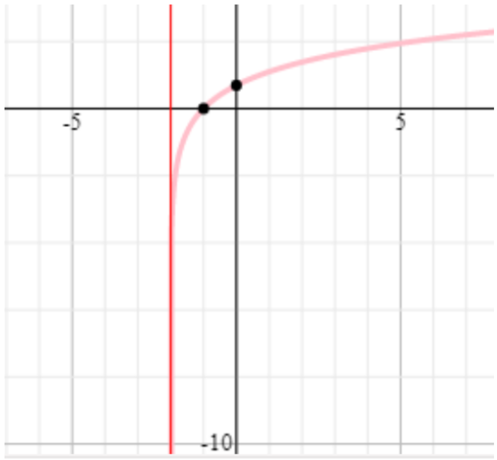
<u>Ejercicio 2</u>. Calificación máxima (2,5 puntos)

Considera las funciones $f: (-2, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln(x+2)$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)$.

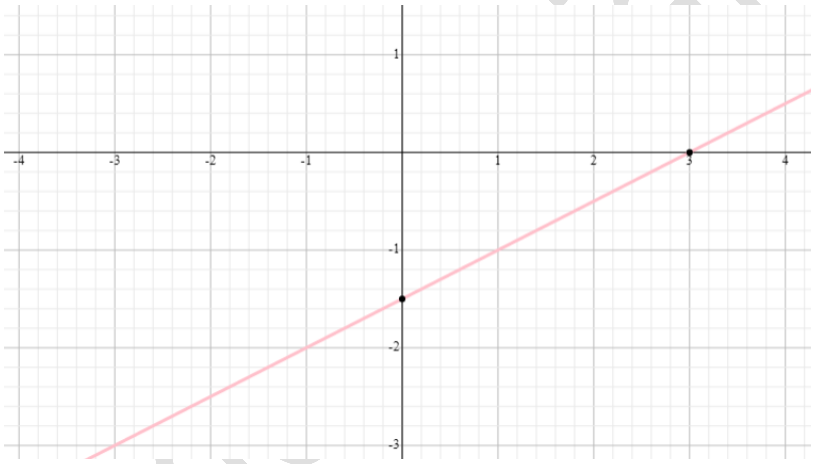
a) (1 punto) Esboza el recinto que determinan la gráfica de f(x) la gráfica de g(x) y las rectas x=1 y x=3.
b) (1,5 puntos) Determina el área del recinto anterior.

Solución:

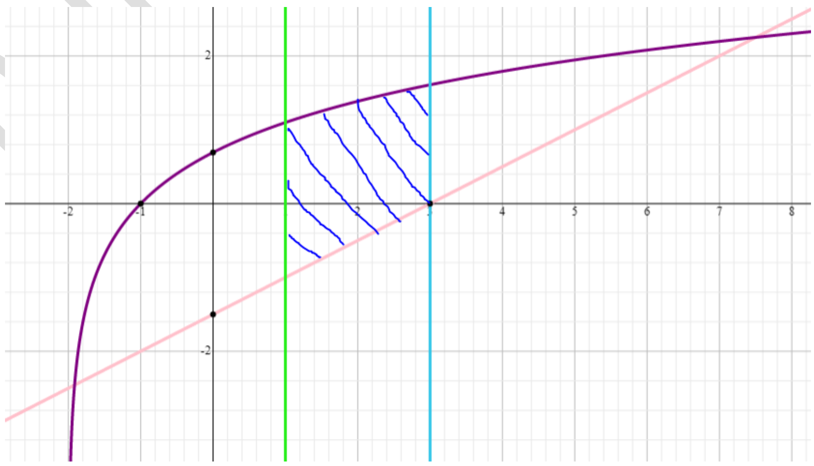
a) La función $f(x) = \ln(x+2)$ es similar a la función $\ln(x)$ pero esta con asíntota vertical en x=-2.



La función g(x) es una recta, basta con determinar dos puntos para poder representarla.



A continuación, superponiendo ambas funciones entre x=1 y x=3 podemos observar el área encerrada entre ellas.



b) $\int_1^3 (\ln(x+2) - \frac{1}{2}(x-3))dx = \left[x\ln|x+2| - x + 2\ln|x+2| - \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2}\right]_1^3 =$
$(5\,ln5 - 3\ln 3 - 1)\,u^2$

Aclaración: $\int \ln(x+2) \Rightarrow$

$$integramos\ por\ partes \quad \begin{cases} u = ln|x+2| \Rightarrow du = \frac{1}{x+2}dx \\ dv = dx \Rightarrow \quad v = x \end{cases}$$

<u>Ejercicio 3.</u> (Calificación máxima 2,5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$.

Considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $X^tA = B^t$. **Discútelo según los distintos valores de m.**

Solución:

$$\begin{cases} (2-m)x + y + mz = 2m^2 - 1 \\ x + my + z = m \\ (2m-1)x + y + z = 1 \end{cases}$$

Definiremos la matriz $M = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 2m-1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad M^* = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & m & 2m^2-1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 2m-1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ahora estudiaremos el rango de dichas matrices en función del parámetro m.

$$\begin{vmatrix} 2-m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 2m-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2-m)m + m + 2m - 1 - m^2(2m-1) - 2 + m - 1 =$$

$$-2m^3 + 6m - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$$

- Si $m \neq 1, -2 \ \Rightarrow\ |M| \neq 0$, por tanto el rango es 3 y el de la ampliada también, se trata de un sistema compatible determinada, existe una única solución.
- Si $m = 1 \ \Rightarrow\ |M| = 0$, por lo que tendrá rango menor que 3. Veamos si tiene algún menor de orden 2 distinto de cero

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rango (M): $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow rango(M) = 1.$

Rango (M^*): $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow rango(M^*) = 1.$

Por tanto que rango(M)=rango(M*)=1< número de incógnitas por lo que es un sistema compatible indeterminado.

- Si $m = -2 \Rightarrow |M| = 0$, por lo que tendrá rango menor que 3. Veamos si tiene algún menor de orden 2 distinto de cero

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rango (M): $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0 \rightarrow rango(M) = 2.$

Rango (M^*): $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & -2 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -54 \neq 0 \rightarrow rango(M^*) = 3.$

Por tanto que rango(M)≠rango(M*) por lo que es un sistema incompatible.

<u>Ejercicio 4.</u> (Calificación máxima 2,5 puntos)
Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos A(1,1,0) B(1,0,2) y C(0,2,1)
a) (1,25 puntos) hallar el área de dicho triángulo.
b) (1,25) Calcula el coseno del ángulo en el vértice A.

Solución:

a) Para determinar el área del triángulo debemos calcular el área del paralelogramo y dividirlo entre dos.

$$A = \frac{1}{2}\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})\right|$$

Primero debemos calcular los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} = (1,0,2) - (1,1,0) = (0,-1,2)$ $\quad$ $\overrightarrow{AC} = (0,2,1) - (1,1,0) = (-1,1,1)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3,-2-1)$$

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}\ u^2$$

b) Para determinar el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ debemos usar la expresión del producto escalar entre ambos vectores:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5} \qquad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (0,-1,2) \cdot (-1,1,1) = 1$$

$$1 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1/\sqrt{15}$$

Por lo que el ángulo comprendido es $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right) = 75$ grados.