MATEMÁTICAS II
JULIO 2020

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Considera la función f definida por f(x)=$\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}$ para x≠ 1, -1

a) (1,25 puntos) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.
b) (1,25 puntos) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Solución:

a) Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1-0-0}{1-0}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1-0-0}{1-0}=1$$

Existe asíntota horizontal en y=1 y por tanto no hay asíntota oblicua.

Asíntota vertical

Como: dom f(x)= ℝ-{±1}

$$\lim_{x\to+1}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\infty$$ Existe asíntota vertical en x=1

$$\lim_{x\to+1^-}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\frac{-4}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+1^+}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\frac{-4}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\frac{0}{0}$$ IND (factorizamos)

$$\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to-1}\frac{(x-3)}{(x-1)}=\frac{-4}{-2}=2$$ No hay asíntota vertical en x=-1

b) Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento debemos estudiar el signo de la derivada de f(x)

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x^2-1)-(x^2-2x-3)(2x)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^3-2x-2x^2+2-2x^3+4x^2+6x}{(x^2-1)^2}$$
$$=\frac{2x^2+4x+2}{(x^2-1)^2}=\frac{2(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2}=\frac{2}{(x-1)^2}>0$$

Por tanto la función crece en el intervalo (-∞, -1)U(-1,1)U(1,+∞)

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Calcula a>0 sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de la función $F(x) = xe^{3x}$, el eje de abscisas y la recta x=a vale $\frac{1}{9}$.

Solución:

Como a>0 y f(x)= xe^{3x} ; f(x)=0→x=0, tenemos que $\int_0^a xe^{3x}dx = \frac{1}{9}$

$I = \int xe^{3x}dx$ Resolvemos por partes $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{3x}dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{cases}$

$$I = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C = \frac{1}{9}e^{3x}(3x-1) + C$$

$$\int_0^a xe^{3x}dx = \frac{1}{9} \rightarrow \left[\frac{1}{9}e^{3x}(3x-1)\right]_0^a = \frac{1}{9} \rightarrow [e^{3x}(3x-1)]_0^a = 1$$
$$\rightarrow e^{3a}(3a-1) - e^0(0-1) = 1 \rightarrow e^{3a}(3a-1) + 1 = 1$$
$$\rightarrow e^{3a}(3a-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} e^{3a} > 0 \\ 3a-1 = 0 \end{cases} \rightarrow 3a - 1 = 0 \rightarrow a = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Considera la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

a) (1,5 puntos) Estudia el rango de A según los valores de m.
b) (1 punto) Para m=2, calcula la inversa de 2020A.

Solución:

a) Estudiamos el rango de la matriz A en función del parámetro m

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+2 \\ m & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 - m^2 - m - m^2 - 2m = 0 \rightarrow 2m^2 + 3m - 5 = 0$$
$$m = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{4} = \frac{-3 \pm 7}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{5}{2} \end{cases}$$
$$\nabla\, m \neq 1\, y -\frac{5}{2}\ el\ rango\ A\ es\ 3$$

Como el determinante menor de A $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, el rango(A)=2 para m= 1 y m= -5/2.

b) Calculamos $(2020A)^{-1}$ con m=2

$$(2020A)^{-1} = \frac{1}{2020}A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|}$$

Calculamos el determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 - 8 = -9$$

Hacemos la traspuesta de A

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculamos la Adjunta de la A^t

$$Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$(2020A)^{-1} = \frac{1}{2020}\frac{\begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}{-9} = \frac{1}{18180}\begin{pmatrix} -5 & -5 & 7 \\ -6 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Siendo a≠0, considera las rectas

$$r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{a} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-3}{-a} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

a) (1,25 puntos) Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de a.
b) (1,25 puntos) Para a=2, determina las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de r y s y es perpendicular a ambas.

Solución:

a) Cogemos el vector y un punto de ambas rectas

$$r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{a}\begin{cases} P_r = (1,2,1) \\ u_r = (1,1,a) \end{cases} \quad s \equiv \frac{x-3}{-a} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}\begin{cases} P_s = (3,3,-1) \\ u_s = (-a,-1,2) \end{cases}$$

Estudiamos si son paralelas, para ello ha de cumplir que $\overrightarrow{u_r} = k\overrightarrow{u_s}$ por lo que:

$$\frac{1}{-a} = \frac{1}{-1} = \frac{a}{2} \rightarrow \begin{cases} -a^2 = 2 \\ -a = 1 \end{cases} \rightarrow \text{No son paralelas}$$

Por lo tanto se cortan o se cruzan. Lo estudiamos en función del parámetro a, para ello hacemos el vector con los dos puntos de la recta y comprobamos si son linealmente dependientes $\overrightarrow{P_rP_s}$, $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$.

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (2,1,-2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - a^2 + 4 + 2a - 2 - 2a = 0 \rightarrow -a^2 + 4 = 0 \rightarrow a = \pm 2$$

Si a=±2 r y s se cortan
Si a≠±2 r y s se cruzan

b) Para a=2, calculamos el punto de corte entre r y s

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\alpha \\ y = 3 - 2\alpha \\ z = -1 + 2\alpha \end{cases} \quad \text{Igualando:}$$

$$\begin{cases} 1 + t = 3 - 2\alpha \\ 2 + t = 3 - \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ t = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Punto de corte } (1,2,1)$$

Para que sea perpendicular a r y a s calculamos el vector perpendicular a ambas con el producto vectorial de los respectivos vectores de r y s.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}$$

Por lo que la recta pedida es:

$$\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2 - 6\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Sea f: [0,2π]→ℝ la función definida por f(x)=$\frac{senx}{2-cosx}$.

a) (2 puntos) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
b) (0,5 puntos) Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x=$\frac{\pi}{3}$.

Solución:

$f(x) = \frac{senx}{2-cosx}$ $con\ x \in [0,2\pi]$ siendo continua en su intervalo ya que 2-cosx≥1

a) Calculamos los extremos con la derivada

$$f'(x)=\frac{cosx(2-cosx)-senxsenx}{(2-cosx)^2}=\frac{2cosx-(cos^2x+sen^2x)}{(2-cosx)^2}=\frac{2cosx-1}{(2-cosx)^2}$$

$$f'(x)=0\rightarrow 2cosx-1=0\rightarrow cosx=\frac{1}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{\pi}{3}\\ x_2=\frac{5\pi}{3}\end{cases}$$

Calculamos los extremos absolutos:

$$Si\ x=0\rightarrow f(0)=0$$
$$Si\ x=\frac{\pi}{3}\rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$Si\ x=\frac{5\pi}{3}\rightarrow f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$Si\ x=2\pi\rightarrow f(2\pi)=0$$

Por lo que tenemos un máximo absoluto en $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y un mínimo absoluto en $\left(\frac{\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

b) Punto de tangencia $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\rightarrow Pendiente\begin{cases}De\ la\ recta\ tangente: f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0\\ De\ la\ recta\ normal: \nexists\rightarrow recta\ vertical\end{cases}$

Recta tangente: $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Recta normal: $x=\frac{\pi}{3}$

Ejercicio 6. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Sea la función f dada por f(x)=$\frac{3x^2+4}{(x-2)^2}$ para x≠ 2.

a) (2 puntos) Calcula $\int f(x)dx$.
b) (0,5 puntos) Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (3,5).

Solución:

a) Calculamos la integral racional

$$\int\frac{3x^2+4}{(x-2)^2}dx\rightarrow \quad \begin{array}{r|l} 3x^2+0x+4 & x^2-4x+4 \\ \cline{2-2} -3x^2+12x-12 & 3 \\ \hline 12x-8 & \end{array}$$

$$\int\frac{3x^2+4}{(x-2)^2}dx=\int\left(3+\frac{12x-8}{(x-2)^2}\right)dx$$

$$\frac{12x-8}{(x-2)^2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-2)^2}\rightarrow A(x-2)+B=12x-8\rightarrow\begin{cases}A=12\\B=16\end{cases}$$

$$\int\left(3+\frac{12x-8}{(x-2)^2}\right)dx=\int\left(3+\frac{12}{(x-2)}+\frac{16}{(x-2)^2}\right)dx=3x+12ln|x-2|-\frac{16}{(x-2)}+C$$

$$F(x)=3x+12ln|x-2|-\frac{16}{(x-2)}+C$$

b) Calculamos la primitiva que pasa por (3,5)

$$F(3)=5\rightarrow 3(3)+12ln|3-2|-\frac{16}{(3-2)}+C=5\rightarrow 9-16+C=5\rightarrow C=12$$

$$F(x)=3x+12ln|x-2|-\frac{16}{(x-2)}+12$$

Ejercicio 7. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Considera A=$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\4&1&4\end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix}a\\2a\\3a\end{pmatrix}$ y X=$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

a) (1,25 puntos) Discute el sistema dado por AX=B según los valores de a.
b) (1,25 puntos) Para a=0, resuelve el sistema dado por AX=B. Calcula, si es posible, una solución en la que y+z=4.

Solución:

a) Calculamos el rango de la matriz A

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&1\\4&1&4\end{vmatrix}=0\rightarrow\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=-1\neq 0\rightarrow rango(A)=2$$

Ahora calculamos el rango de la matriz ampliada en función del parámetro a:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\1&0&1&2a\\4&1&4&3a\end{array}\right)\rightarrow\begin{vmatrix}1&1&a\\1&0&2a\\4&1&3a\end{vmatrix}=a+8a-2a-3a=0\rightarrow a=0$$

Por lo que: ∇ a≠0→rango(A*)=3≠rango(A) →sistema incompatible sin solución.
Para a=0→rango(A*)=2=rango(A)≠número de incógnitas → sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones.

b) Para a=0, tendríamos el siguiente sistema

$$\begin{cases}x+y+z=0\\x+z=0\\4x+y+4z=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y=0\\x=-z\end{cases}\rightarrow(x,y,z)=(-z,0,z), siendo\ z\in\mathbb{R}$$

Por lo tanto satisface la solución y+z=4, al ser y=0 tendríamos que z=4 y x=-4

Ejercicio 8. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Se considera el punto A(1,-2,0) y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases}$

a) (1,25 puntos) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r.

b) (1,25 puntos) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r.

Solución:

Pasamos la recta r a paramétrica:

$$\begin{cases} \mathrm{x}+\mathrm{y}=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2-3z \\ y=-2+3z \\ z=z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_r=(2,-2,0) \\ \overrightarrow{u_r}=(-3,3,1) \end{cases}$$

a) Plano π_1 perpendicular a r $\rightarrow \overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{n_\pi} \rightarrow \pi_1 \equiv -3x+3y+z+D=0$

$$A \in \pi_1 \rightarrow -3(1)+3(-2)+0+D=0 \rightarrow D=9$$

Por lo que el plano pedido:

$$\pi_1 \equiv -3x+3y+z+9=0$$

b) Plano π_2 que contiene a r y pasa por A:

$\overrightarrow{P_r A}=(-1,0,0)$

Hacemos el determinante con A, $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{P_r A}$ e igualamos a 0:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0 \rightarrow -y-2+3z=0$$

Por lo que el plano pedido:

$$\pi_2 \equiv y-3z+2=0$$