MATEMÁTICAS II
JULIO 2019
OPCIÓN A

Ejercicio 1.

a) Discutir según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y+mz=4 \end{cases} \quad \text{(1 punto)}$$

b) Resolverlo para m=1 (1 punto)

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & m & 4 \end{pmatrix}$

Estudiamos los rangos de las dos matrices:

rg(A): $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ => rg(A) =2

rg(B): $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$ => rg(B) =2

rg(A)=rg(B)<nº de incógnitas→SCI independientemente del valor del parámetro m.

b) Resolverlo para m=1

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=1+\lambda \\ 2x+y=4-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \rightarrow \frac{\begin{matrix} x+y=1+\lambda \\ -2x-y=-4+\lambda \end{matrix}}{-x+0 \quad =-3+2\lambda} \rightarrow x=3-2\lambda$$

$$\textit{sustituimos la } x \textit{ en la primera ecuación.} \quad 3-2\lambda+y=1+\lambda \rightarrow y=-2+3\lambda$$

Solución: $\begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=-2+3\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

Ejercicio 2.

a) Consideremos los vectores $\vec{u}\,(1,1,a)$ y $\vec{v}\,(1,-1,a)$. Calcular a para que sean perpendiculares.(0,5 puntos)

b) Calcular un vector unitario perpendicular a $\vec{p}\,(1,2,3)$ y $\vec{q}\,(1,-2,-3)$ (1,5 puntos)

Solución:

a) Para que sean perpendiculares el ángulo que forman tiene que ser 90º.Utilizamos el producto escalar: $\vec{u}\,.\,\vec{v} = |\,\vec{u}\,|\,.\,|\vec{v}\,|$ cos 90 => $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$ => 1-1+a2 = 0 => a = 0

b) Para calcular un vector perpendicular a otros dos, utilizamos el producto vectorial:

$$\vec{p}\ x\vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 6\vec{j}\ \text{-}\ 4\vec{k}$$

Para hacerlo unitario lo dividimos entre su módulo, y obtenemos: $\frac{3}{\sqrt{13}}\vec{\mathrm{j}} - \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{\mathrm{k}}$

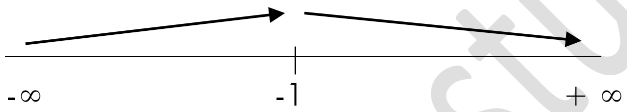
Ejercicio 3.

Dada la función f(x) = $\begin{cases} -x^2 - 2x & si\ x < 0 \\ x^2 - 4x & si\ x \geq 0 \end{cases}$

a) Probar que posee un máximo relativo en -1 y un mínimo relativo en 2. **(**1,4 puntos)
b) Probar que no posee extremo relativo en 0. (0,6 puntos)

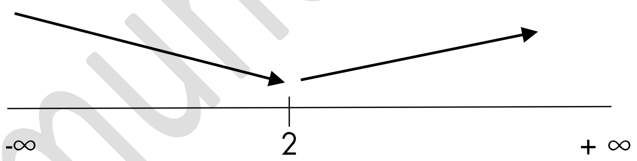
Solución:

a) Máximo en x = -1; f´(x) = -2x-2



Por lo tanto hay un máximo en el punto (-1, 1)

Mínimo en x = 2
f´(x) = 2x-4



Por lo tanto hay un mínimo en el punto (2, -4)

b) Para que exista un extremo relativo en el x = 0, la función ha de ser continua y derivable en ese punto (Teorema de Bolzano)
Estudiamos la continuidad:

f(x) = $\begin{cases} -x^2 - 2x & si\ x < 0 \\ x^2 - 4x & si\ x \geq 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 0 \\ \text{f(0)} = 0 \end{array}\right] \quad \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \text{f(0)} \Rightarrow \text{La función es continua en x = 0}$$

Como la función es continua, hay posibilidad de que sea o no derivable:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & si\ x < 0 \\ 2x - 4 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \lim_{x \to 0+} f'(x) = -4 \\ \lim_{x \to 0-} f'(x) = -2 \end{matrix}\right] \quad \text{Como } \lim_{x \to 0+} f(x) \neq \lim_{x \to 0-} f(x) \Rightarrow \text{La función no es derivable}$$

Si la función no es derivable, no puede tener un extremo relativo en ese punto.

Ejercicio 4.

a) Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{e^x - cosx}$ (1 punto)

b) Calcular a, siendo a > 1 para que el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones f(x) = x, g(x) = ax y x = 1 sea 1. (1 punto)

Solución:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{e^x - cosx} = \frac{0}{0} \to IND\ aplicamos\ L'Hopital \to \lim_{x \to 0} \frac{cos\ x}{e^x cosx - e^x senx} = 1$

b) $\int_0^1 (ax - x)dx = 1 \Rightarrow \left.\frac{ax^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow a = 3$

Ejercicio 5.

La temperatura del cuerpo humano sigue una distribución normal de media 37°C y desviación típica 0,5°C.

a) Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona esté comprendida entre 36°C y 38°C. (1 punto)

b) Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona sea menor que 36,5°C. (1 punto)

Solución:

a) $P(36 < x < 38) = P(\frac{36-37}{0,5} < z < \frac{38-37}{0,5}) = P(-2 < z \leq 2)$

$P(z < 2) = 0,9772$

$P(z > -2) = 1 - P(z < 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$

$P(36 < x < 38) = 0,9772 - 0,0228 = 0,9544$

b) $P(x < 36,5) = P(z < \frac{36,5-37}{0,5}) = P(z < 1) = 0,8413$