MATEMÁTICAS CIENCIAS SOCIALES
JUNIO 2019
OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 3 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-4z=0 \\ 3x+ay+2z=2 \end{cases}$$

a) (1.5 puntos) Clasifica el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a.
b) (1.5 puntos) Resuelve el sistema para $a=-1$.

Solución:

a) Clasificamos el sistema mediante rangos con Rouche Frobenius. Consideramos la matriz de coeficientes y su ampliada, A y A' respectivamente.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & a & 2 \end{pmatrix}, \qquad A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & a & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Para calcular los rangos veamos primero para que valores de a el determinante es nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & a & 2 \end{vmatrix}=6a-19 \rightarrow |A|=0 \; si \;\; 6a-19=0 \;\rightarrow a=\frac{19}{6}$$

- Si $a \neq \frac{19}{6}$, entonces el determinante es distinto de cero y rg(A)=3=rg(A')=número de incógnitas por lo que se trata de una sistema compatible determinado.
- Si $a=\frac{19}{6}$, estudiemos ahora los rangos de ambas matrices para dicho valor.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 19/6 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & 19/6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

El rango de A es menor que 3, buscamos algún menor de orden 2 distinto de 0 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=1\neq 0$, por lo que rg(A)=2

Calculamos ahora el rango de A' $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}=20$, por lo que rg(A)=3.

rg(A)≠rg(A'), es un sistema incompatible.

b) Si $a=-1$, es un sistema compatible determinado, podemos resolverlo por cramer.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-4z=0 \\ 3x-y+2z=2 \end{cases}, \rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -25$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -10, \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -20, \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -20$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-10}{-25} = \frac{2}{5}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-20}{-25} = \frac{4}{5}, \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-20}{-25} = \frac{4}{5}, \text{ es decir } x = \frac{2}{5}, y = z = \frac{4}{5}.$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 3 puntos)
Un estudio basado en los datos censales sobre la evolución de la población en una ciudad española revela que, en el período 2005-2015, el número de habitantes (en miles) sigue la función:

$$p(t) = (t-2)^2(1-2t) + 252t + 116$$

donde t indica el tiempo medido en años, siendo $t=0$ el tiempo correspondiente al año 2005. Tomando $p(t)$, determina los periodos de crecimiento y decrecimiento del número de habitantes de dicha ciudad. ¿En qué momento del tiempo el número de habitantes es máximo?¿Qué número de habitantes tiene la ciudad en ese momento?

Solución:

Para determinar el período de crecimiento y decrecimiento hacemos la derivada e igualamos a cero.

$$p'(t) = -6(t^2-3t-40), p'(t) = 0 \rightarrow -6(t^2-3t-40) = 0 \rightarrow t = -5 \; y \; t = 8$$

como en nuestro caso partimos desde t=0, podemos descartar t=-5. El dominio de nuestra función es (0,10), ya que de 2005 a 2015 pasan 10 años y partimos de que el origen es 2005.

	(0,8)	(8,10)
p'(t)	+	−
p(t)	Creciente	Decreciente

Por tanto el período de crecimiento de la población es de 2005 a 2013 y el período de decrecimiento de 2013 a 2015.
En t=8 tenemos un máximo, es decir, el año de mayor población es 2013. Y la población de dicho año es:$p(8) = 1592$, es decir en dicho año la población es de 1592000 habitantes.

Ejercicio 3.(Calificación máxima: 3 puntos)
Las autoridades sanitarias están estudiando los efectos del tabaco en la salud. El tiempo que tarda un fumador en dejar definitivamente de fumar se ajusta a una distribución normal, de media 5 meses y desviación típica 2 meses. Con esa información:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que un fumador tarde más de 4 meses en dejar definitivamente de fumar.
b) (2 puntos) Si se toman 50 fumadores, calcula la probabilidad de que el tiempo medio que tardan los 50 fumadores en dejar definitivamente de fumar sea inferior a 6 meses.

Solución:

a) Se trata de una normal $N(5,2)$.

$$P(X \geq 4) = P\left(Z \geq \frac{4-5}{2}\right) = P(Z \geq -0.5) = P(Z \leq 0.5) = 0.6915\ (69.15\%)$$

b) Tenemos una muestra de tamaño $n = 50$, por lo que ahora la desviación típica será $\sigma = \frac{2}{\sqrt{50}} = 0.28$, y la media se distribuirá como una normal $N(5,0.28)$.

$$P(X \leq 6) = P\left(Z \leq \frac{6-5}{0.28}\right) = P(Z \leq 3.53) = 0.9998\ (99.98\%)$$

Ejercicio 4.(Calificación máxima: 1 punto)
La ficha técnica del estudio social "*Influencers* en redes sociales" indica que se ha encuestado a 1096 individuos de 16 a 55 años de edad residentes en España. La muestra se ha tomado de manera estratificada, con muestreo aleatorio simple en cada estrato. El error de estimación de la proporción de individuos que se declaran seguidores de *influencers* es de $\pm 3\%$ con un nivel de confianza del 95.5%.
Para esta ficha técnica, identifica los siguientes elementos: población, diseño muestral, tamaño muestral, parámetro estimado.

Solución:

- La población se define como el conjunto de todos los elementos cuyas propiedades se van a estudiar, en este caso individuos residentes en España de edades comprendidas entre 16 a 55 años.
- El diseño muestral seguido es aleatorio simple, es decir, cuando todos los elementos de la población tiene la misma probabilidad de ser seleccionados en la muestra y esta probabilidad es conocida.
- El tamaño muestral es el subconjunto de casos o individuos de la población que se va a estudiar, en este caso es los 1096 individuos encuestados.
- El parámetro es la característica de la población que se va a estudiar, en este caso es la cantidad de seguidores de influencers.

mundoestudiante