MATEMÁTICAS
CIENCIAS SOCIALES
JUNIO 2019
OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 3 puntos)
Una familia de 3 miembros recibe la devolución de los impuestos abonados en la campaña RENTA2017 por un importe de 3250 €. Sabiendo que la madre recibe el doble que el hijo y que el padre recibe $\frac{2}{3}$ de lo que recibe la madre, calcula el importe de la devolución que recibe cada miembro de la familia.

Solución:

Denotamos por x, y y z al importe de devolución de la madre, padre e hijo respectivamente, las ecuaciones que definen mi problema son:

$$\begin{cases} x+y+z=3250 \\ x=2z \\ y=\frac{2}{3}x \end{cases}$$

resolvemos el sistema,

$$y=\frac{2}{3}x, z=\frac{x}{2} \rightarrow x+\frac{2}{3}x+\frac{x}{2}=3250 \rightarrow 13x=19500 \rightarrow$$

$$x=1500, y=1000, z=750$$

Es decir, la madre recibe una devolución de 1500€, el padre 1000€ y el hijo 750€.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 3 puntos)
La producción de petróleo (millones de barriles) de un pozo petrolífero a lo largo del tiempo x (años) se mide según la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} 17x & Si\ 0 \leq x < 5 \\ -3x^2+30x+10 & Si\ 5 \leq x < 10 \\ 10 & Si\ x \geq 10 \end{cases}$$

a) (1.5 puntos) Estudia la continuidad de la función. ¿Cuántos barriles de petróleo produce dicho pozo cuando x=8?
b) (1.5 puntos) Calcula el área limitada por la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo [2,3]

Solución:

a) Para que una función sea continua en un punto a se ha cumplir la igualdad:
$f(a)=\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)$, en este caso se tiene que comprobar en x=5 y x=10:

- x=5

$$\begin{cases} f(5) = -3\cdot 5^2 + 30\cdot 5 + 10 = 85 \\ \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} 17x = 17\cdot 5 = 85 \\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} -3x^2 + 30x + 10 = 85 \end{cases}$$, en x=5 la función es continua.

- x=10

$$\begin{cases} f(10) = 10 \\ \lim\limits_{x\to 10^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 10^-} -3x^2 + 30x + 10 = -3\cdot 100 + 30\cdot 10 + 10 = 10 \\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} 10 = 10 \end{cases},$$

la función es continua en x=10.

Para x=8, se trata de la función $-3x^2 + 30x + 10$, por lo que

$$f(8) = -3\cdot 8^2 + 30\cdot 8 + 10 = 58$$

Es decir, para 8 años, tenemos 58 millones de barriles.

b) Dicho intervalo corresponde a la función $17x$, y como su único punto de corte con el eje OX es el (0,0) ya que es una función afín, no hay puntos de corte entre medias del intervalo por lo que la integral al calcular es:

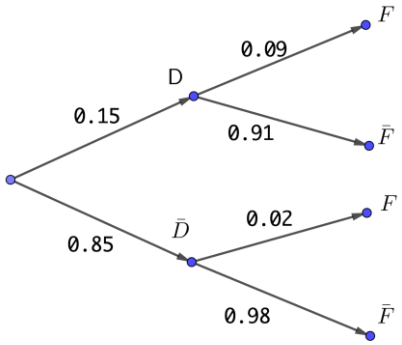
$$\int_2^3 17x dx = 17\frac{x^2}{2}\Big]_2^3 = \left(17\frac{3^2}{2}\right) - \left(17\frac{2^2}{2}\right) = \frac{153}{2} - \frac{68}{2} = \frac{85}{2} = 42.5\, u^2$$

Ejercicio 3.(Calificación máxima: 3 puntos)
El 15% de los paquetes repartidos por una empresa de transporte llegan defectuosos. Entre los paquetes que llegan defectuosos un 9% llega fuera de plazo, mientras que entre los no defectuosos sólo un 2% llega fuera de plazo. Se elige al azar un paquete repartido por esta empresa:

a) (1.5 puntos) Calcular la probabilidad de que el paquete elegido llegue fuera de plazo.
b) (1.5 puntos) Sabiendo que el paquete elegido llega fuera de plazo, ¿Qué probabilidad hay de que llegue defectuoso?

Solución:

Denotamos al suceso paquete defectuoso por D (a su complementario, no llegar defectuoso, denotamos por $\bar{D}$) y al suceso llegar fuera de plazo por F (a su complementario, no llegar fuera de plazo, denotamos por $\bar{F}$). El árbol del problema en este caso es:



mundoestudiante

a) $P(F) = P(D) \cdot P\left({}^{F}/_{D}\right) + P(\bar{D}) \cdot P\left({}^{F}/_{\bar{D}}\right) = 0.15 \cdot 0.09 + 0.85 \cdot 0.02 = 0.03$

b) $P\left({}^{D}/_{F}\right) = \frac{P(D \cap F)}{P(F)} = \frac{0.15 \cdot 0.09}{0.03} = 0.45$

Ejercicio 4.(Calificación máxima: 1 punto)
En el aeropuerto A, se toma una muestra de 100 días y se observa que en 25 hay saturación aérea. Con esos datos, se calculan dos intervalos de confianza para el parámetro proporción de días con saturación aérea en el aeropuerto A: [0.122,0.378] y [0.165,0.335] ¿Cuál es el intervalo de menor confianza?. Justifica tu respuesta.

Solución:

A priori se puede deducir que será el segundo ya que a mayor nivel de confianza $(1-\alpha)$, mayor $Z\alpha_{/2}$ y por tanto mayor amplitud tendrá el intervalo (donde la amplitud es la longitud del intervalo (a,b), es decir, b-a). Pero para justificarlo numéricamente despejamos el valor de $Z\alpha_{/2}$ del intervalo, recordemos que la fórmula del intervalo para la proporción es $\bar{p} \pm Z\alpha_{/2}\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$, usando la parte positiva despejamos en cada intervalo:

- [0.122,0.378]

$0.378 = 0.25 + Z\alpha_{/2}\sqrt{\frac{0.25(1-0.25)}{100}} \rightarrow Z\alpha_{/2} = 2.976$, siendo $Z\alpha_{/2}$ el valor que cumple
$P(-Z\alpha_{/2} \leq Z \leq Z\alpha_{/2}) = 1-\alpha \rightarrow P(Z \leq Z\alpha_{/2}) = 1-\frac{\alpha}{2} \rightarrow P(Z \leq 2.976) = 1-\frac{\alpha}{2}$
$0.99856 = 1-\frac{\alpha}{2} \rightarrow \alpha = 0.00288 \rightarrow 1-\alpha = 0.99712$, es decir un nivel del 99.71%

- [0.165,0.335] Operando de forma análoga al intervalo anterior se tiene

$$0.335 = 0.25 + Z\alpha_{/2}\sqrt{\frac{0.25(1-0.25)}{100}} \rightarrow Z\alpha_{/2} = 1.976 \rightarrow P(Z \leq 1.976) = 1-\frac{\alpha}{2}$$

$0.97565 = 1-\frac{\alpha}{2} \rightarrow \alpha = 0.0487 \rightarrow 1-\alpha = 0.9513$, es decir un nivel del 95.13%

En conclusión, tiene menor nivel de confianza el segundo intervalo.

mundoestudiante