MATEMÁTICAS II
JUNIO 2019
OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Estudie la existencia y unicidad de soluciones según los valores del parámetro m.
b) (1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones anterior para el caso $m = 2$.

Solución:

a) Clasificamos el sistema mediante rangos con Rouche Frobenius. Consideramos la matriz de coeficientes y su ampliada, A y A' respectivamente.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Para calcular los rangos veamos primero para que valores de m el determinante es nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2m - 2 \rightarrow |A| = 0\ si\ \ 2m - 2 = 0\ \rightarrow m = 1$$

- Si $m \neq 1$, entonces el determinante es distinto de cero y rg(A)=3=rg(A')=número de incógnitas por lo que se trata de una sistema compatible determinado.
- Si $m = 1$, estudiemos ahora los rangos de ambas matrices para dicho valor.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

El rango de A es menor que 3, buscamos algún menor de orden 2 distinto de 0

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, por lo que rg(A)=2, calculamos ahora el rango de A'

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 4$, por lo que rg(A)=3.

En resumen rg(A)≠rg(A'), es un sistema incompatible.

mundoestudiante

b) Si $m = 2$, es un sistema compatible determinado, podemos resolverlo por Cramer.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 2x + y = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 6 \end{cases}, \rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 2, \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2$$

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1, \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1$, es decir $x = y = z = 1$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

a) (1 punto) Calcular la ecuación del plano π que contiene a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$, y pasa por el punto $A = (1,2,1)$.

b) (1 punto) Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $B = (2,1,2)$ y es perpendicular a las rectas $s_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$ y $s_2 \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$.

Solución:

a) Para determinar la ecuación de un plano necesitamos dos vectores y un punto, en este caso el vector director de la recta r, el vector que une el punto A con el punto de la recta y como punto el punto A.

$$\overrightarrow{v_r} = (2,3,2), P_r = (1,1,1), A = (1,2,1) \rightarrow \overrightarrow{P_rA} = (0,1,0)$$

$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2z - 2 - 2x + 2 = -2x + 2z \rightarrow \pi \equiv -2x + 2z = 0$, o lo que es lo mismo: $\pi \equiv -x + z = 0$.

b) Para obtener la ecuación de una recta son necesarios el vector director y un punto, como se quiere que sea perpendicular a dos rectas a la vez, el vector director será perpendicular a los vectores directores de dichas rectas, este vector se obtiene mediante el producto mixto de los vectores directores de las rectas:

$$u_r = u_{S_1} x\, u_{S_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{k} = (-2,-6,8) \equiv (-1,-3,4)$$

y como ha de pasar por B, ya podemos escribir la ecuación de la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-2}{4}$$

Ejercicio 3.(Calificación máxima: 2 puntos)
Dada la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$, para $x \in \mathbb{R}$.

a) (1 punto) Calcule sus máximos y mínimos relativos y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) (1 punto) Calcule el máximo y el mínimo absoluto en el intervalo $[-2,2]$.

Solución:

a) Para calcular la monotonía y los puntos extremos derivamos la función e igualamos a cero, y así obtenemos lo puntos críticos.

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12, f'(x) = 0 \rightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \rightarrow x = -2 \ o \ x = 1$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2,1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente	Decreciente	Creciente

Por lo que la función será creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(-2,1)$. Por lo que tiene un máximo en $x = -2$ y un mínimo en $x = 1$. Una forma de asegurarse que dichos puntos son así es hacer la segunda derivada y comprobar el signo en dichos puntos.

$$f''(x) = 12x + 6$$
$$f''(-2) = -18 < 0, \ \ x = -2 \ es \ un \ máximo$$
$$f''(1) = 18 > 0, \ \ x = 1 \ \ es \ un \ mínimo$$

b) Para calcular los máximos y mínimos absolutos en un intervalo cerrado tenemos que comprobar lo que vale la función en los extremos del intervalo ya que estos pueden ser puntos máximos o mínimos.

$$f(-2) = 20, f(1) = -7, f(2) = 4$$

por lo que el máximo absoluto esta en $x = -2$ y el mínimo absoluto está en $x = 1$

Ejercicio 4.(Calificación máxima: 2 puntos)
a) (1 punto) Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{x \sin(x)}$.
b) (1 punto) Calcular el área encerrada por las gráficas de $f(x) = 4x$ y de $g(x) = x^3$ en el intervalo $[0,2]$, probando anteriormente que en dicho intervalo $f \geq g$.

Solución:

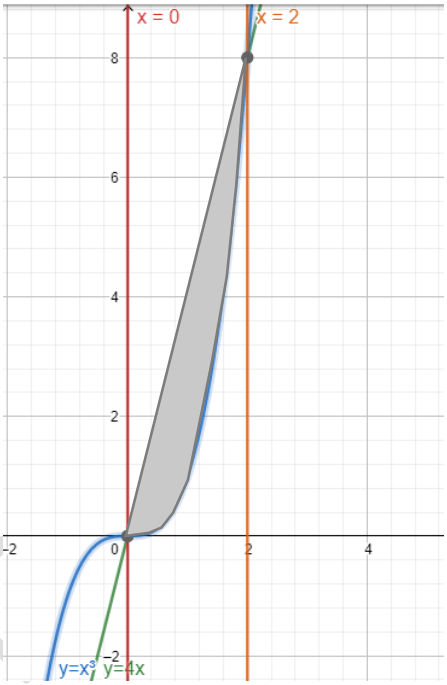
a) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{x \sin(x)} = \frac{0}{0} =^{L'H} \lim_{x \to 0} = \frac{-\sin(x)}{\sin(x)+x\cos(x)} = \frac{0}{0} = L'H \lim_{x \to 0} \frac{-\cos(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\sin(x)} = \frac{-1}{2}$

$$\lim_{x \to 0} = \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = L'H \lim_{x \to 0} \frac{-\sin(x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{-x}{2x} = \frac{-1}{2}$$

b) El área comprendida entre dos funciones es igual al área de la función que está por encima menos el área de la función que está por debajo, es decir $\int g(x) - f(x)$, donde g es la función que está por encima y f la que está por debajo. Donde los límites de integración serán los puntos donde se corten ambas funciones.
En este caso veamos donde coinciden las funciones:

$$f(x) = g(x) \rightarrow 4x = x^3 \rightarrow x^3 - 4x = 0 \rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \rightarrow x = 0{,}2, \qquad x = -2$$

pero nuestro intervalo es $[0{,}2]$ por lo que -2 lo descartamos directamente. No hay puntos de corte intermedios en nuestro intervalo por lo que la integral será de 0 a 2.
En este caso para ver la que está por encima, dando un valor intermedio del intervalo a las dos funciones y el que de un resultado mayor será de la que esté por encima.



Por ejemplo, suponemos $x = 1$: $f(1) = 4, g(1) = 1,$ así que en efecto f está por encima de g en dicho intervalo.

$$\int_0^2 (f - g)(x)dx = \int_0^2 (4x - x^3)dx = \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \left(8 - \frac{16}{4}\right) - 0 = 4u^2$$

Ejercicio 5.(Calificación máxima: 2 puntos)
Las notas de Matemáticas II de 500 alumnos presentados al examen de EBAU tienen una distribución normal con media 6.5 y desviación típica 2.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un alumno haya obtenido más de 8 puntos.
b) (1 punto) ¿Cuantos alumnos obtuvieron notas menores de 5 puntos?

Solución:

Se trata de una distribución normal $N(6.5{,}2)$

a) $P(X \geq 8) = P\left(Z \geq \frac{8-6.5}{2}\right) = P(Z \geq 0.75) = 1 - P(Z \leq 0.75) = 1 - 0.7734 = 0.2266\ (22.66\%)$

b) $P(X \leq 5) = P\left(Z \leq \frac{5-6.5}{2}\right) = P(Z \leq -0.75) = P(Z \geq 0.75) = 1 - P(Z \leq 0.75) = 1 - 0.7734 = 0.2266\ (22.66\%)$, y como son 500 alumnos, el número concreto de alumnos es :$0.2266 \cdot 500 = 113.3 \cong 114$ alumnos.

mundoestudiante