Prueba común de acceso a ciclos formativos de grado superior
Parte III: Ejercicio de Matemáticas
Mayo 2022

DATOS DEL PARTICIPANTE	
APELLIDOS:	
NOMBRE:	Nº Documento Identificación:
Instituto de Educación Secundaria:	

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN Y SOLUCIONES

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN

- Este ejercicio se califica entre 0 y 10, con dos decimales, redondeando a la centésima inmediatamente superior cuando la milésima sea igual o superior a cinco.
- Se valorará la comprensión de las cuestiones planteadas así como la buena presentación.
- Se indica a continuación la puntuación de cada una de las cuestiones que constituyen el **Ejercicio de Matemáticas**
  - Cuestión 1ª.- **3 puntos: a) 1 punto; b) 1 punto; c) 1 punto.**
  - Cuestión 2ª.- **2 puntos.**
  - Cuestión 3ª.- **2.5 puntos: a) 1.25 puntos; b) 1.25 puntos.**
  - Cuestión 4ª.- **2.5 puntos: a) 0.5 puntos; b) 1 punto; c) 1 punto.**

Notas:
- En la solución a cada cuestión se deben incluir las aclaraciones y criterios de valoración a tener en cuenta en la corrección. También se debe detallar la calificación parcial acorde a estos criterios para que todos los profesores correctores apliquen los mismos.
- Escribir las cuestiones de nuevo, delante de cada solución.

SOLUCIÓN CUESTIÓN 1: 3 puntos: a) 1 punto; b) 1 punto; c) 1 punto (25 min).
Enunciado:

1) Dadas las matrices $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$

a) Calcule la matriz $\boldsymbol{A^2 + B}$
b) Calcule la matriz inversa de A
c) Calcule la matriz X de dimensión 2x2 que verifique AX=B

Solución:

a) Calculamos la matriz $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$

$$A^2 + B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución: $\boldsymbol{A^2 + B} = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$

Planteamiento correcto =0,5 puntos

Cálculo correcto =0,5 puntos

b) Cálculo de la matriz inversa de A

Calculamos su determinante. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0$

Calculamos la matriz formada por sus adjuntos. $A_{adj} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

DATOS DEL PARTICIPANTE	
APELLIDOS:	
NOMBRE:	Nº Documento Identificación:
Instituto de Educación Secundaria:	

Calculamos la traspuesta de la matriz anterior $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ y finalmente la dividimos por el valor del determinante obteniendo la matriz inversa de A

$A^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

Solución: $\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}$

Planteamiento correcto =0.5 puntos

Cálculo correcto =0.5 puntos

c) Calculamos la matriz X de dimensión 2x2 que verifique AX=B

Podemos utilizar el resultado del apartado anterior o resolver el correspondiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.
Multiplicando ambos miembros de la ecuación por la matriz inversa de A obtenemos $X = A^{-1} \cdot B$
$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$

Solución: $\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}}$

Planteamiento correcto =0.5 puntos

Cálculo correcto =0.5 puntos

SOLUCIÓN CUESTIÓN 2: 2 puntos (15 min).
Enunciado:

2) Lucía, Raquel y Antonio han recaudado un total de 1240 euros para su viaje de estudios. Se sabe que Lucía ha recaudado tanto como Raquel y Antonio juntos, y que Raquel ha recaudado las dos terceras parte de lo recaudado por Antonio. Calcule cuánto ha recaudado cada uno de ellos.

Solución:

Llamamos x=dinero recaudado por Lucía;

y=dinero recaudado por Raquel

z=dinero recaudado por Antonio

DATOS DEL PARTICIPANTE	
APELLIDOS:	
NOMBRE:	Nº Documento Identificación:
Instituto de Educación Secundaria:	

Planteamos el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{cases} x+y+z=1240 \\ x=y+z \\ y=\frac{2}{3}z \end{cases}$$

El sistema anterior es equivalente a

$$\begin{cases} x+y+z=1240 \\ x-y-z=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases}$$

Resolvemos aplicando el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1240 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1240 \\ 0 & -2 & -2 & -1240 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1240 \\ 0 & 1 & 1 & 620 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1240 \\ 0 & 1 & 1 & 620 \\ 0 & 0 & -5 & -1860 \end{pmatrix}$$

El sistema escalonado será de la forma

$$\begin{cases} x+y+z=1240 \\ y+z=620 \\ -5z=-1860 \end{cases}$$

Y resolviendo el sistema $z=372 \quad \Rightarrow \quad y=620-372=248 \quad \Rightarrow \quad x=1240-248-372=620$

Solución: Lucía recauda x=620 €; Raquel recauda y=248 €; Antonio recauda z=372 €

Planteamiento correcto =1 punto

Cálculo correcto de las soluciones =1 punto

SOLUCIÓN CUESTIÓN 3: 2.5 puntos: a) 1.25 puntos; b) 1.25 puntos (25 min).
Enunciado:

3) Dada la función real de variable real definida por $f(x)=x^3-3x^2+4$

a) Determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y sus mínimos.
b) Calcule el área de la región plana acotada, limitada por la función $f(x)=e^x$; el eje OX y las rectas x=0; x=1

DATOS DEL PARTICIPANTE	
APELLIDOS:	
NOMBRE:	Nº Documento Identificación:
Instituto de Educación Secundaria:	

Solución:

a) Calculamos primero los máximos y mínimos de la función.
Para ello, calculamos la derivada de la función e igualamos a 0

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x-2) = 0$$

Resolvemos la ecuación y obtenemos como soluciones $x = 0; x = 2$

Calculamos la derivada segunda de la función $f''(x) = 6x - 6$

Evaluamos $f''(0) = -6 < 0$ por lo tanto en el punto (0, 4) tendremos un máximo relativo

Evaluamos $f''(2) = 6 > 0$ por lo tanto en el punto (2,0) tendremos un mínimo relativo

Estudiamos el crecimiento y el decrecimiento de la función:

La función es continua en todo R.

La derivada $f'(x) = 3x(x-2)$ es positiva en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ por lo tanto en dicho intervalo la función será creciente y negativa en el intervalo (0,2) por lo tanto en dicho intervalo será decreciente.

Solución: Máximo en (0,4), mínimo en (2,0) Creciente en $(-\infty, \mathbf{0}) \cup (\mathbf{2}, \infty)$ Decreciente en (0,2)

Cálculo correcto de la derivada de la función: 0.25 puntos

Planteamiento correcto máximos y mínimos =0.25 puntos

Cálculo correcto de máximos y mínimos =0.25 puntos

Planteamiento correcto intervalos Crecimiento y decrecimiento =0.25 puntos

Cálculo correcto de intervalos Crecimiento y decrecimiento =0.25 puntos

b) Calculamos el área limitada por la función $f(x) = e^x$; el eje OX y las rectas x=0; x=1

La función es positiva entre x=0 y x=1 por lo que el valor del área coincidirá con la integral definida de la función entre x=0; x=1. Aplicamos la regla de Barrow y obtenemos:

$$A = \int_0^1 e^x dx = e^1 - e^0 = (e-1)u^2$$

Solución: Área=(e-1) u^2

Planteamiento correcto =0,50 puntos

Resolución correcta =0,75 puntos

DATOS DEL PARTICIPANTE	
APELLIDOS:	
NOMBRE:	Nº Documento Identificación:
Instituto de Educación Secundaria:	

SOLUCIÓN CUESTIÓN 4: 2.5 puntos: a) 0.5 puntos b) 1 punto c) 1 punto (25 min)
Enunciado:

4) **Un jugador realiza un lanzamiento de un dado y si la puntuación obtenida es mayor o igual que 4, gana la partida.**
   a) **Calcule la probabilidad de que un jugador gane la partida, si realiza un solo lanzamiento.**
   b) **Si el jugador realiza 5 lanzamientos consecutivos, calcule la probabilidad de que gane exactamente tres de las cinco partidas.**
   c) **Si el jugador realiza 5 lanzamientos consecutivos, calcule la probabilidad de que gane al menos una de las cinco partidas.**

Solución:

a) La probabilidad de que el jugador gane la partida es la probabilidad de que obtenga una puntuación mayor o igual que 4.
Sea A el suceso obtener mayor o igual que 4 al lanzar un dado. A= {4,5,6}
$p(A) = 0{,}5$

Solución: $\boldsymbol{p(A) = 0{,}5}$

Planteamiento correcto =0.25 puntos

Resolución correcta =0.25 puntos

b) Si el jugador realiza 5 lanzamientos, podemos considerar la variable X=número de partidas ganadas, que seguirá una distribución binomial B (5;0,5) de parámetros n=5 p=0,5 q=0,5
Si estudiamos el caso en el que gana exactamente 3 partidas k=3

$$\mathrm{p}(\mathrm{X} = 3) = \binom{5}{3} 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^2 = 10 \cdot 0{,}5^5 = 0{,}3125$$

Solución: La probabilidad de ganar 3 de las 5 partidas es 0,3125

Planteamiento correcto =0.5 puntos

Resolución correcta =0.5 puntos

c) En las mismas condiciones del apartado anterior B (5;0,5) de parámetros n=5 p=0,5 q=0,5; ahora el número de éxitos será k≥ 1
Calculamos la probabilidad utilizando el suceso contrario (el contrario de al menos uno es ninguno)
$\mathrm{p}(\mathrm{X} \geq 1) = 1 - \mathrm{p}(\mathrm{X} = 0) = 1 - \binom{5}{0} 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^5 = 1 - 0{,}5^5 = 0{,}96875$

Solución: La probabilidad de ganar al menos una de las cinco partidas es $\boldsymbol{0{,}96875}$

Planteamiento correcto =0.5 puntos

Resolución correcta =0.5 puntos