

MATEMÁTICAS (PRUEBA DE COMPETENCIA ESPECÍFICA)
INSTRUCCIONES GENERALES PARA LA PRUEBA Y CRITERIOS DE EVALUACIÓN

INSTRUCCIONES GENERALES

- Dispone de 90 minutos para realizar el examen.
- Se permite el uso de calculadora científica que **no** posea alguna de las siguientes capacidades: Cálculo estadístico, cálculo matricial, representación gráfica y lenguaje alguno de programación. No está permitido el uso de ordenadores, tablets, teléfonos, reloj inteligente, ni ningún tipo de material electrónico o aparatos de comunicación.
- Mientras tenga el examen en su poder **solo** puede comunicarse con los miembros del tribunal de examen. Cualquier otro tipo de comunicación o uso de dispositivos o materiales no autorizados supondrá la retirada del examen, lo cual será reflejado en el acta como **copia ilegal**.
- El examen debe realizarse con bolígrafo azul o negro.
- No puede utilizar ningún tipo de corrector (tipp-Ex) en la hoja de respuestas tipo test.
- No puede utilizar ninguna hoja que no haya sido entregada por algún miembro del tribunal de examen. Las hojas de respuesta deben ir numeradas en las casillas que aparecen en la parte inferior.
- El examen está traducido al inglés con el objetivo de facilitar la comprensión de las preguntas, pero **debe contestarse en español**. En caso de que considere que hay alguna diferencia de interpretación entre la parte en español y la parte traducida al inglés, prima el examen original realizado en español.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

La prueba consta de dos partes.

- **Primera parte de la prueba:** La calificación máxima de este bloque es de 5 puntos. Debe contestar a un **máximo de 10** preguntas de las 15 posibles. En caso de contestar más, solo se tendrán en cuenta las 10 primeras. Cada pregunta correcta suma 0.5 puntos, mientras que cada pregunta incorrecta resta 0.1 puntos. Las preguntas sin contestar o con doble marca no suman ni restan puntos. Las preguntas deben contestarse realizando una marca adecuada en la hoja de respuestas que se adjunta.
- **Segunda parte de la prueba:** La calificación máxima de este bloque es de 5 puntos. Cada problema se valora hasta 2.5. Se debe contestar **solamente una opción** con dos problemas de desarrollo. Redacte cada problema en hojas separadas. La parte de problemas se contestará en hojas aparte. **En caso de que se hagan dos problemas de dos opciones diferentes, solo se calificará el primer problema entregado.** De igual manera, si se hacen más de dos problemas solo se calificarán los dos primeros que sean válidos de acuerdo con la observación anterior.

Sólo debe entregar la hoja de identificación, la hoja de lectura óptica y las hojas con los problemas desarrollados.

Conteste a un máximo de 10 cuestiones.

1 En el espacio tridimensional se consideran el plano $\pi : 3x - 2y - z = 2$ y la recta

$$r : \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 1 \\ x + 3y - 3z = 3 \end{cases}$$

Entonces:

- (A) El plano y la recta se cortan perpendicularmente.
(B) La recta está contenida en el plano.
(C) Ninguna de las otras dos.
- 2 Toda A matriz real cuadrada tal que $A^2 = A$, cumple que:
(A) $\det(A) > 0$.
(B) Si A es regular, $A = I$ (la matriz identidad).
(C) Ninguna de las anteriores.
- 3 La distancia del punto $(2, 1, 3)$ a la recta $x = 2y = 3z$ es:
(A) Mayor que 1.
(B) Menor que 1.
(C) Ninguna de las otras dos.
- 4 Se tienen dos sucesos A y B con probabilidades respectivas $p(A) = 0,6$ y $p(B) = 0,7$. Entonces:
(A) Los sucesos A y B son tales que $A \cup B$ es necesariamente el espacio total.
(B) Los sucesos A y B pueden ser disjuntos.
(C) Ninguna de las otras dos.
- 5 El límite $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x$, con $n > 0$:
(A) Tiene un valor $L < 0$ independiente de n .
(B) No existe.
(C) Ninguna de las otras dos.
- 6 Para toda $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ función continua en $[a, b]$ y tal que $f(a)f(b) > 0$, se cumple que:
(A) Existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.
(B) No necesariamente existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.
(C) Ninguna de las otras dos.
- 7 Un dado no trucado se lanza dos veces. ¿Cuál es la probabilidad p de sacar un 2 en la primera tirada y no sacar el 4 en la segunda?
(A) $0,1 < p < 0,15$.
(B) $0,15 < p < 0,2$.
(C) Ninguna de las otras dos.

8 Sea A la matriz real (con a, b, c arbitrarios)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Entonces, se cumple:

- (A) Si $b = c$, entonces $\text{rango}(A) = 1$.
- (B) Si $b = 0$, entonces $\text{rango}(A) = 2$.
- (C) Ninguna de las anteriores.

9 La función

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- (A) Es creciente en todo su dominio.
- (B) Es decreciente en $(-\infty, 0)$.
- (C) Ninguna de las otras dos.

10 Toda matriz real A cuadrada invertible cumple que:

- (A) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, donde A^T es la traspuesta.
- (B) $\det(A^{-1}) = -\det(A)$.
- (C) Ninguna de las anteriores.

11 Sean las rectas $r : (0, -1, 1) + a(1, 3, -4)$ y $s : (1, 0, 0) + b(1, 0, 1)$ en el espacio:

- (A) Son secantes.
- (B) La distancia entre ellas es $\sqrt{43}/43$.
- (C) Ninguna de las otras dos.

12 Se tiene un bote con caramelos de colores: rojo, amarillo, verde, azul y naranja. Se sabe que la probabilidad de sacar al azar un caramelo rojo es 0,2, la de sacar uno amarillo es 0,15, uno verde 0,1 y uno azul 0,3. Si se sacan 60 caramelos de la bolsa, ¿cuántos esperaríamos que haya de color naranja (denotamos ese número por N)? 0.0125

- (A) $8 \leq N \leq 14$.
- (B) $13 \leq N \leq 18$.
- (C) Ninguna de las otras dos.

13 Si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & \lambda \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

es ortogonal, entonces:

- (A) $\lambda > 0$.
- (B) $\lambda < 0$.
- (C) Ninguna de las anteriores.

- 14 Se pregunta a 50 consumidores si les gustan dos productos A y B. Hay 37 personas que a las que les gusta el producto A y, de ellas, hay 25 a las que también les gusta el producto B. Hay 3 personas a las que no les gusta ninguno de los dos. Se elige al azar una de las personas entre las que sí les gusta B. ¿Cuál es la probabilidad p de que no le guste A? :
- (A) $0,25 < p < 0,3$.
 - (B) $0,2 < p < 0,25$.
 - (C) Ninguna de las otras dos.
- 15 Para toda $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , se cumple que:
- (A) Existe un $\theta \in (a, b)$ tal que $f(b) = f'(\theta)(b - a)$.
 - (B) Existe un $\theta \in (a, b)$ tal que $f(b) = f(a) + f'(\theta)(b - a)$.
 - (C) Ninguna de las otras dos.

Elija una sola opción y conteste a los problemas en hojas separadas.

Opción 1

1

a) Estudiar la posición relativa en el espacio de los planos π_1 y π_2 , con ecuaciones respectivas:

$$\pi_1 : x + 2y - z = 3$$

$$\pi_2 : ax + (a - 2)y + 2z = 4,$$

en función del parámetro real $a \in \mathbb{R}$.

b) Determinar, en el caso en que los planos se intersecten a lo largo de una recta, un vector director de la misma.

2 Dada la función real

$$f(x) = \ln \sqrt{4 - x^2}$$

(donde \ln denota el logaritmo natural o neperiano), se pide:

a) Representar gráficamente la curva $y = f(x)$, discutiendo razonadamente su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y extremos relativos.

b) Determinar las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función en los puntos donde corta al eje de abscisas. ¿Cuál es el ángulo que forma cada una de estas rectas tangentes con el eje de las x ?

Opción 2

3 Calcular las integrales indefinidas siguientes:

a)

$$\int \frac{\ln x}{(x + 1)^2} dx$$

b)

$$\int \frac{xe^x}{(1 + x)^2} dx$$

4 Se ha realizado un estudio de valoración de un determinado candidato político, tomando una muestra de 80 hombres y 120 mujeres, con los siguientes resultados (dados en función de un parámetro real $\delta \in \mathbb{R}$):

	Nº hombres	Nº mujeres	Total
Nº valoraciones positivas	$50 - \delta$	$40 + \delta$	90
Nº valoraciones negativas	$30 + \delta$	$80 - \delta$	110
Total	80	120	200

Si se elige una persona al azar de entre la muestra, calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) Sabiendo que es hombre, que tenga una valoración positiva del candidato.

b) Que sea hombre y favorable al candidato.

c) Que sea mujer o que esté a favor del candidato.

d) ¿Qué valor debe tener el parámetro δ para que los sucesos “ser mujer” y “no estar a favor del candidato” sean independientes?