mundoestudiante
métodoBarbeito

PCE MATEMÁTICAS II
MAYO 2023

PREGUNTAS TIPO TEST

Conteste a un máximo de 10 cuestiones. (Calificación máxima: 5 puntos)

1. En el espacio tridimensional se considera el plano π: 3x - 2y - z = 2 y la recta

$$r: \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 1 \\ x + 3y - 3z = 3 \end{cases}$$

Entonces:
(A) El plano y la recta se cortan perpendicularmente.
(B) La recta está contenida en el plano.
(C) Ninguna de las otras dos.

2. Toda A matriz real cuadrada tal que $A^2=A$, cumple que:
(A) det (A) > 0.
(B) Si A es regular, A = I (la matriz identidad).
(C) Ninguna de las anteriores.

3. La distancia del punto (2,1,3) a la recta x=2y=3x es:
(A) Mayor que 1.
(B) Menor que 1.
(C) Ninguna de las otras dos.

4. Se tienen dos sucesos A y B con probabilidades respectivas p(A)=0,6 y p(B)=0,7.
Entonces:
(A) Los sucesos A y B son tales que A U B es necesariamente el espacio total.
(B) Los espacios A y B pueden ser disjuntos.
(C) Ninguna de las otras dos.

5. El límite $L = \lim_{x \to 0^+} x^n \ln(x)$, con n>0:
(A) Tiene un valor L < 0 independiente de n.
(B) No existe.
(C) Ninguna de las otras dos.

6. Para toda f(x):$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] \to \mathbb{R}$ función continua en [a,b] y tal que f(a)f(b)>0, se cumple que:
(A) Existe algún c∈(a,b) tal que f(c)=0.
(B) No necesariamente existe algún c∈(a,b) tal que f(c) = 0.
(C) Ninguna de las otras dos.

7. Un dado no trucado se lanza dos veces. ¿Cuál es la probabilidad p de sacar un 2 en la primera tirada y no sacar el 4 en la segunda?
(A) 0,1 < p < 0,15.
(B) 0,15 < p < 0,2.
(C) Ninguna de las otras dos

8. Sea A la matriz real (con a, b, c arbitrarios) A=$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$
Entonces, se cumple:

(A) Si b = c, entonces rango (A)=1.
(B) Si b=0, entonces rango (A)=2.
(C) Ninguna de las anteriores.

9. La función $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
(A) Es creciente en todo su dominio.
(B) Es decreciente en $(-\infty,0)$.
(C) Ninguna de las otras dos.

10. Toda matriz real A cuadrada invertible cumple que:
(A) $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$ donde A^t es la traspuesta.
(B) det $(A^{-1})=-\det(A)$
(C) Ninguna de las anteriores.

11. Sean las rectas r: (0,-1,1) + a(1,3,-4) y s : (1,0,0) + b(1,0,1) en el espacio:
(A) Son secantes.
(B) La distancia entre ellas es $\sqrt{43}/43$.
(C) Ninguna de las otras dos.

12. Se tiene un bote con caramelos de colores: rojo, amarillo, verde, azul y naranja. Se sabe que la probabilidad de sacar al azar un caramelo rojo es 0,2, la de sacar uno amarillo es 0,15, uno verde 0,1 y uno azul 0,3. Si se sacan 60 caramelos de la bolsa, ¿cuántos esperaríamos que haya de color naranja (denotamos ese número por N)?
(A) 8 MENOR o IGUAL N MENOR o IGUAL 14.
(B) $13 \le N \le 18$.
(C) Ninguna de las otras dos.

13. Si la matriz

$$\begin{pmatrix} 1/2 & \lambda \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

es ortogonal, entonces:
(A) $\lambda>0$.
(B) $\lambda<0$.
(C) Ninguna de las anteriores.

14. Se pregunta a 50 consumidores si les gustan los productos A y B. Hay 37 personas a las que les gusta el producto A y, de ellas, hay 25 a las que también les gusta el producto B. Hay 3 personas a las que no les gusta ninguno de los dos. Se elige al azar una de las personas entre las que sí les gusta B. ¿Cuál es la probabilidad p de que no le guste A?
(A) $0,25 < p < 0,3$.
(B) $0,2 < p < 0,25$.
(C) Ninguna de las otras dos.

15. Para toda $\boldsymbol{f(x)}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función continua en [a,b] y derivable en (a,b), se cumple que:
(A) Existe un $\boldsymbol{\theta}$ en (a,b) tal que $\boldsymbol{f(b) = f'(\theta)(b-a)}$.
(B) Existe un $\boldsymbol{\theta}$ en (a,b) tal que $\boldsymbol{f(b) = f(a) + f'(\theta)(b-a)}$.
(C) Ninguna de las otras dos.

PREGUNTAS TIPO DESARROLLO

Elija una opción

OPCIÓN 1

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

a) Estudiar la posición relativa en el espacio de los planos π_1 y π_2, con ecuaciones respectivas:

$$\pi_1: x + 2y - z = 3$$
$$\pi_2: ax + (a-2)y + 2z = 4$$

en función del parámetro real a € ℝ.

b) Determinar, en el caso en que los planos se intersecten a lo largo de una recta, un vector director de la misma.

Solución:

a) Para estudiar la posición relativa obtenemos las siguientes matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ a & a-2 & 2 \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ a & a-2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

De la matriz ampliada cogemos un determinante menor

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$$

por lo que el rango de M^* es dos.

De la matriz M

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a & 2 \end{vmatrix} = 2 + a = 0 \ \rightarrow a = -2$$

Por lo que si a≠-2 el rang(M)=rang(M^*)=2<nº incógnitas SCI con infinitas soluciones. Los planos se cortan en una recta.

Si a=-2

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Al tener dos filas proporcionales el rang(M)=1≠ran(M^*)=2 SI sin solución, los planos son paralelos.

b) La recta de intersección entre los dos planos:

$$r: \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ ax + (a-2)y + 2z = 4 \end{cases}$$

Calculamos su vector

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ a & a-2 & 2 \end{vmatrix} = (4 + a - 2)i - (2 + a)j + (a - 2 - 2a)k$$
$$= (2 + a)i - (2 + a)j - (2 + a)k = (2 + a)(i - j - k)$$

Por lo que el vector buscado es (1,-1,-1)

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)
Dada la función real

$$f(x) = ln\sqrt{4-x^2}$$

(donde ln denota el logaritmo natural o neperiano), se pide:
a) Representar gráficamente la curva y = f(x), discutiendo razonadamente su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y extremos relativos.
b) Determinar las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función en los puntos donde corta al eje de abscisas. ¿Cuál es el ángulo que forma cada una de estas rectas tangentes con el eje de las x?

Solución:

a) Calculamos el dominio

$$4-x^2>0 \rightarrow x<\pm 2 \rightarrow Domf(x) = (-2{,}2)$$

Puntos de corte con los ejes:

$$x=0 \rightarrow y = ln\sqrt{4} \rightarrow y = ln2 \rightarrow (0, ln2)$$

$$y=0 \rightarrow 0 = ln\sqrt{4-x^2} \rightarrow e^0 = \sqrt{4-x^2} \rightarrow 1 = 4-x^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \rightarrow \begin{cases} (\sqrt{3},0) \\ (-\sqrt{3},0) \end{cases}$$

Asíntotas:
Asíntotas verticales

$$\lim_{x\to 2^-} ln\sqrt{4-x^2} = ln0^+ = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} ln\sqrt{4-x^2} = ln0^+ = -\infty$$

Por lo que tiene dos asíntotas en x=2 por la izquierda y en x=-2 por la derecha.
Al no estar definida la función en ±∞ no tiene ni asíntotas horizontales ni oblicuas.

Intervalos de crecimiento: derivamos la función e igualamos a cero:

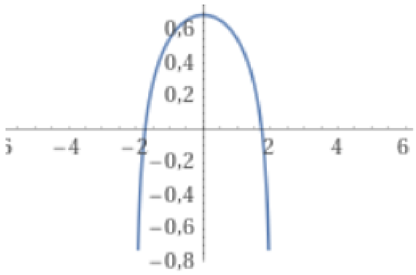
$$y = \frac{1}{2}\ln(4-x^2) \rightarrow y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{4-x^2} = \frac{-x}{4-x^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de la derivada

$$\begin{array}{ccccc} -2 & \nearrow \; + & 0 & \searrow \; - & 2 \end{array}$$

Crece (-2,0)
Decrece (0,2)
Tiene un máximo en (0,ln2)

Gráfica de la función:



b) La derivada en un punto es la pendiente de la recta tangente en ese punto. Lo calculamos con los cortes con los ejes de abscisas $\pm\sqrt{3}$.

$$\begin{cases} f'(\sqrt{3}) = \dfrac{-\sqrt{3}}{4-\left(\sqrt{3}\right)^2} = -\sqrt{3} \\ f'(-\sqrt{3}) = \dfrac{-(-\sqrt{3})}{4-\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3} \end{cases}$$

El ángulo de esas rectas tangente con el eje de la x es:

$$\begin{cases} \tan\theta = f'(\sqrt{3}) \to \tan\theta = -\sqrt{3} \to \theta = -60° \\ \tan\theta = f'(-\sqrt{3}) \to \tan\theta = \sqrt{3} \to \theta = 60° \end{cases}$$

OPCIÓN 2

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)
Calcular las integrales indefinidas siguientes:

a) $\int \frac{lnx}{(x+1)^2} dx$

b) $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$

Solución:

a) Calculamos la integral por partes:

$$I = \int \frac{\ln(x)}{(x+1)^2} dx \to \begin{cases} u = \ln(x) \to du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{dx}{(1+x)^2} \to v = \frac{-1}{1+x} \end{cases} \to I = \frac{-\ln(x)}{1+x} - \int \frac{-1}{1+x} \cdot \frac{1}{x} dx$$

Calculamos la segunda integral racional:

$$\int \frac{dx}{(x(x+1)} \to \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \to A(x+1) + Bx = 1 \to \begin{cases} Si\ x = 0 \to A = 1 \\ Si\ x = -1 \to B = -1 \end{cases}$$

$$\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = ln|x| - ln|x+1|$$

Por lo que nos queda

$$I = \frac{-ln|x|}{1+x} + ln|x| - ln|x+1| + C$$

b) Obtenemos la integral por partes:

$$I=\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx\rightarrow\begin{cases}u=xe^x\rightarrow du=(e^x+xe^x)dx\\ dv=\dfrac{dx}{(1+x)^2}\rightarrow v=\dfrac{-1}{1+x}\end{cases}\rightarrow I=\frac{-xe^x}{1+x}-\int\frac{-e^x(1+x)}{1+x}dx$$

Nos queda

$$I=\frac{-xe^x}{1+x}+e^x+C$$

<u>Ejercicio 4.</u> (Calificación máxima: 2,5 puntos)
Se ha realizado un estudio de valoración de un determinado candidato político, tomando una muestra de 80 hombres y 120 mujeres, con los siguientes resultados (dados en función de un parámetro real δ € ℝ:

	Nª hombres	Nº mujeres	Total
Nº valoraciones positivas	50 – δ	40 + δ	90
Nº valoraciones negativas	30 + δ	80 -δ	110
Total	80	120	200

Si se elige una persona al azar de entre la muestra, calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:
a) Sabiendo que es hombre, que tenga una valoración positiva del candidato.
b) Que sea hombre y favorable al candidato.
c) Que sea mujer o que esté a favor del candidato.
d) ¿Qué valor debe tener el parámetro δ para que los sucesos "ser mujer" y "no estar a favor del candidato" sean independientes?

Solución:

Nombramos los sucesos

A→ sea hombre
B→ sea mujer
C→ valoración positiva
D→ valoración negativa

a) Nos piden una probabilidad condicionada

$$p({}^{D}/_{A})=\frac{p(A\cap D)}{p(A)}=\frac{50-\delta}{80}$$

b) La intersección

$$p(A\cap C)=\frac{50-\delta}{200}$$

c) La unión

$$p(B\cup C)=p(B)+p(C)-p(B\cap C)=\frac{120}{200}+\frac{90}{200}-\frac{40+\delta}{200}=\frac{170-\delta}{200}$$

d) Para que sean independientes han de cumplir:

$$p(B\cap D)=p(B)\cdot P(D)\rightarrow\frac{40+\delta}{200}=\frac{120}{200}\cdot\frac{100}{200}\rightarrow\delta=14$$