MATEMÁTICAS II
JULIO 2021

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)
Calcula a y b sabiendo que $\lim_{x\to o} \frac{a(1-\cos(x))+bsen(x)-2(e^x-1)}{x^2} = 7$.

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a(1-\cos(x)) + b\,sen(x) - 2(e^x-1)}{x^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{L'Hopital}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\,sen\,x + b\cos x - 2e^x}{2x} = \frac{b-2}{0}$$

Como el límite ha de ser finito $\to b-2=0 \to b=2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\,sen\,x + 2\cos x - 2e^x}{2x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{L'Hopital} \lim_{x\to 0} \frac{a\cos x - 2\,sen\,x - 2e^x}{2} = \frac{a-2}{2}$$

Como ha de ser igual a 7, igualamos

$$\frac{a-2}{2} = 7 \to a-2 = 14 \to a = 16$$

Por tanto $a = 16$ y $b = 2$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)
Halla $a > 0$ y $b > 0$ sabiendo que la gráfica de la función f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{bx^2}{1+ax^4}$ tiene en el punto *(1,2)* un punto crítico.

Solución:

2) $f(x) = \frac{bx^2}{1+ax^4}$

Punto crítico en $(1,2)$ $\begin{cases} f(1)=2 \\ f'(1)=0 \end{cases}$

la primera derivada

$$f'(x) = \frac{2bx(1+ax^4) - bx^2 \cdot 4ax^3}{(1+ax^4)^2} = \frac{2bx + 2bax^5 - 4bax^5}{(1+ax^4)^2} =$$

$$= \frac{2bx - 2abx^5}{(1+ax^4)^2}$$

$$f'(1)=0 \to \frac{2b-2ab}{(1-ax^4)^2} = 0 \to 2b(1-a) = 0 \begin{cases} 2b=0 \to b=0 \\ 1-a=0 \to a=1 \end{cases}$$

Como $b>0$ y $a>0$ no sirve $b=0$

$$f(1)=2 \to \frac{b\cdot 1}{1+1} = 2 \to b = 4$$

Luego, $a=1$ y $b=4$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Considere la función f: $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = 1 + \int_0^x te^t dt$$

Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y sus puntos de inflexión (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución:

3)

$$f(x) = 1 + \int_0^x t e^t dt$$

Calculamos $I = \int t e^t dt$ por partes

$u = t \quad du = dt$
$dv = e^t dt \quad v = e^t$

$$I = t e^t - \int e^t dt = t e^t - e^t + C$$

$$f(x) = 1 + \int_0^x t e^t dt = 1 + [t e^t - e^t]_0^x = 1 + x e^x - e^x - (-1) =$$

$$= x e^x - e^x + 2$$

Calculamos primera y segunda derivada

$$f'(x) = e^x + x e^x - e^x = x e^x$$

$$f''(x) = e^x + x e^x$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow e^x (1 + x) = 0 \rightarrow x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
Signo $f''(x)$	$-$	$+$
Función	$\cap$	$\cup$

$F(x)$ es cóncava en $(-\infty, -1)$ y convexa en $(-1, +\infty)$ con un punto de inflexión en $(-1, 2-\frac{2}{e})$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ (para $x \neq -1$, $x \neq 1$). Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto (2,4).

Solución:

4) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ primitiva que pase $(2,4)$

Dividimos polinomio

$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & x^2-1 \\ \hline -x^2+1 & 1 \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx = \int 1\,dx + \int \frac{2}{x^2-1}\,dx = x + \int \frac{2}{x^2-1}\,dx$$

$x^2-1=0 \rightarrow x = \pm 1$

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)} \quad \left\{ \begin{array}{l} A(x-1)+B(x+1)=2 \\ Ax - A + Bx + B = 2 \\ \quad \Downarrow \\ -A+B=2 \\ A+B=0 \\ \hline 2B=2 \rightarrow B=1 \; ; \; A=-1 \end{array} \right.$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx = x + \int \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = x - \ln|x+1| + \ln|x-1| + C$$

que pase por $(2,4)$

$4 = 2 - \ln|2+1| + \ln|2-1| + C \rightarrow C = 2 + \ln 3$

la primitiva que nos piden

$F(x) = x - \ln|x+1| + \ln|x-1| + 2 + \ln 3$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $A^2 = -A^{-1}$. (1.25 puntos)

b) Dadas las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz X que verifica $A^4X + B = AC$. (1.25 puntos)

Solución:

5)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a) $A^2 = -A^{-1}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 15 - 16 - 12 = -1$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix} \qquad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = -A^{-1} \quad \text{c.q.d.}$$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$A^4 X + B = AC \rightarrow A^2 \cdot A^2 X = AC - B \rightarrow (-A^{-1})(-A^{-1}) X = AC - B \Rightarrow$

$A^{-1} A^{-1} X = AC - B \Rightarrow A A^{-1} A A^{-1} X = A^2 AC - A^2 B \Rightarrow$

$X = (-A^{-1}) AC - (-A^{-1}) B \Rightarrow X = -C + A^{-1} \cdot B$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -19 \\ -2 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -21 \\ -3 & 15 \end{pmatrix} //$$

Ejercicio 6. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Una empresa de mensajería opera en tres rutas distintas A, B y C. Semanalmente hace un total de 70 viajes, y el número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C.

a) Si sabemos que el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70, ¿podemos deducir el número deviajes por cada ruta? Razona la respuesta. (1.25 puntos)

b) Si el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5, ¿cuántos viajes hace por cada ruta? (1.25 puntos)

Solución:

⑥ Llamamos

$A \to x$ $\qquad x + y + z = 70$

$B \to y$ $\qquad y = x + z$

$C \to z$

a) $2(x + z) = 70$

Tendremos el sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 70 \\ x - y + z &= 0 \\ 2x + 2z &= 70 \end{aligned}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \to \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ rango } A = 2$$

$$A^* \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 70 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 70 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 70 \end{vmatrix} = -70 + 140 - 70 = 0 \Rightarrow \text{rango } A^* = 2$$

rango A = rango A^* $\Rightarrow$ SCI con infinitas soluciones por lo que no podremos deducir el número de viajes por cada ruta

b) $2z = y - 5$ Tendremos el sistema

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 70 \\ x - y + z &= 0 \\ y - 2z &= 5 \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} x + 5 + 2z + z &= 70 \\ x - 5 - 2z + z &= 0 \\ y &= 5 + 2z \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} x + 3z &= 65 \\ x - z &= 5 \\ \hline 4z &= 60 \end{aligned}$$

$z = 15 \quad x = 20$

$y = 35$

20 viajes ruta A, 35 ruta B y 15 ruta C

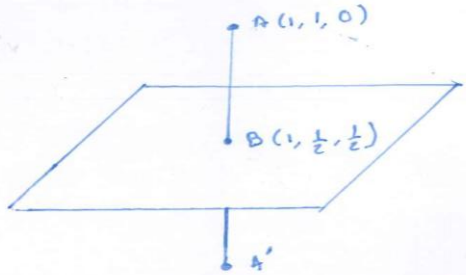
Ejercicio 7. (Calificación máxima: 2,5 puntos)
La recta perpendicular desde el punto *A(1, 1, 0)* a un cierto plano π corta a éste en el punto *B (1, 1/2,1/2*).

a) Calcula la ecuación del plano π. (1.5 puntos)
b) Halla la distancia del punto *A* a su simétrico respecto a π. (1 punto)

Solución:

7) $A(1,1,0)$ a π corte $B(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

a)



El vector normal del plano es $\vec{AB}(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ y paso por $B(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$:

$$-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+D=0 \rightarrow -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+D=0 \rightarrow D=0$$

El plano que nos piden:

$$-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=0 \rightarrow -y+z=0$$

b) La distancia que nos piden:

$$d_{AA'}=2\cdot d_{AB}=2|\vec{AB}|=2\cdot\sqrt{0+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\ u$$

Ejercicio 8. (Calificación máxima: 2,5 puntos)
Considera las rectas

$$r\equiv\begin{cases}x=3+\lambda\\ y=1\\ z=-3-\lambda\end{cases} \quad \text{y} \quad s\equiv\begin{cases}x+y=1\\ z=0\end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de *r* y *s*.
b) Halla la recta que corta perpendicularmente a *r* y a *s*.

Solución:

8)

$$r\equiv\begin{cases}x=3+\lambda\\ y=1\\ z=-3-\lambda\end{cases} \qquad s\equiv\begin{cases}x+y=1\\ z=0\end{cases}$$

a) Calculemos punto y vector de cada recta

$$r\equiv\begin{cases}A=(3,1,-3)\\ \vec{u}=(1,0,-1)\end{cases} \qquad s\equiv\begin{cases}x=1-t\\ y=t\\ z=0\end{cases} \quad \begin{matrix}B(1,0,0)\\ \vec{v}=(-1,1,0)\end{matrix}$$

$\vec{AB}\ (-2,-1,3)$

Estudiemos rango de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{AB}$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 3\end{vmatrix}=3-1-2=0 \qquad \text{rango}=2 \rightarrow \text{las rectas son secantes}$$

b) Calculamos el punto de corte de las dos rectas

$$\left.\begin{array}{r} 3+\lambda = 1-t \\ 1 = t \\ -3-\lambda = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow t=1,\ \lambda=-3 \rightarrow \text{punto corte } (0,1,0)$$

Calculamos el vector director de la recta que es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$$

Luego la recta es:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1} \quad //$$

mundoestudiante