MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
JULIO 2022

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

a) (1,5 puntos) Determine la matriz X que verifica $A \cdot X + B = A^2 \cdot C$.

b) (1 punto) Determine las dimensiones de dos matrices P y Q sabiendo que

$$A \cdot P^t + C = C \cdot (Q \cdot B)$$

Solución: b) P_{2x3}, Q_{2x3}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$I = A^{-1} A$

a) $AX + B = A^2 \cdot C \rightarrow AX = A^2 \cdot C - B \rightarrow A^{-1} A X = A^{-1}(A^2 C - B) \rightarrow$

$X = A^{-1} A^2 C - A^{-1} B \rightarrow X = AC - A^{-1} B$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -4 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4 + 1 - 2 = 3$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -13 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 & 2/3 \\ 1/3 & -13/3 \\ -1/3 & 7/3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -4 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5/3 & 2/3 \\ 1/3 & -13/3 \\ -1/3 & 7/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 & 19/3 \\ -13/3 & 10/3 \\ 10/3 & -13/3 \end{pmatrix} //$$

b) $\underset{3x3}{A} \cdot P^t + \underset{3x2}{C} = \underset{3x2}{C} (\underset{3x2}{Q \cdot B})$

P^t ha de ser una 3x2 para poder multiplicar a A y luego sumar con C, por lo que P sera 2x3

Q = ha de ser una 2x3 para poder multiplicar con C por la izquierda y a B por la derecha

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)
Se considera el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$y - 2x \leq 7; \quad -x + 3y \leq 21; \quad x + 2y \leq 19; \quad x + y \leq 14$$

a) (1,4 puntos) Represente dicho recinto y determine sus vértices
b) (0,6 puntos) Calcule los valores máximo y mínimo de la función F(x,y)=x+4y en el recinto anterior, así como los puntos donde se alcanzan
c) (0,5 puntos) ¿Podría tomar la función objetivo F el valor 40 en algún punto de la región factible? ¿Y el valor 20? Justifique las respuestas

Solución: a) (0,7); (3,8); (9,5) b) Máximo 35 c) No, si

$y - 2x \leq 7$ ① $\quad -x + 3y \leq 21$ ② $\quad x + 2y \leq 19$ ③ $\quad x + y \leq 14$ ④

a) Representamos

①

x	y
0	7
$-7/2$	0

②

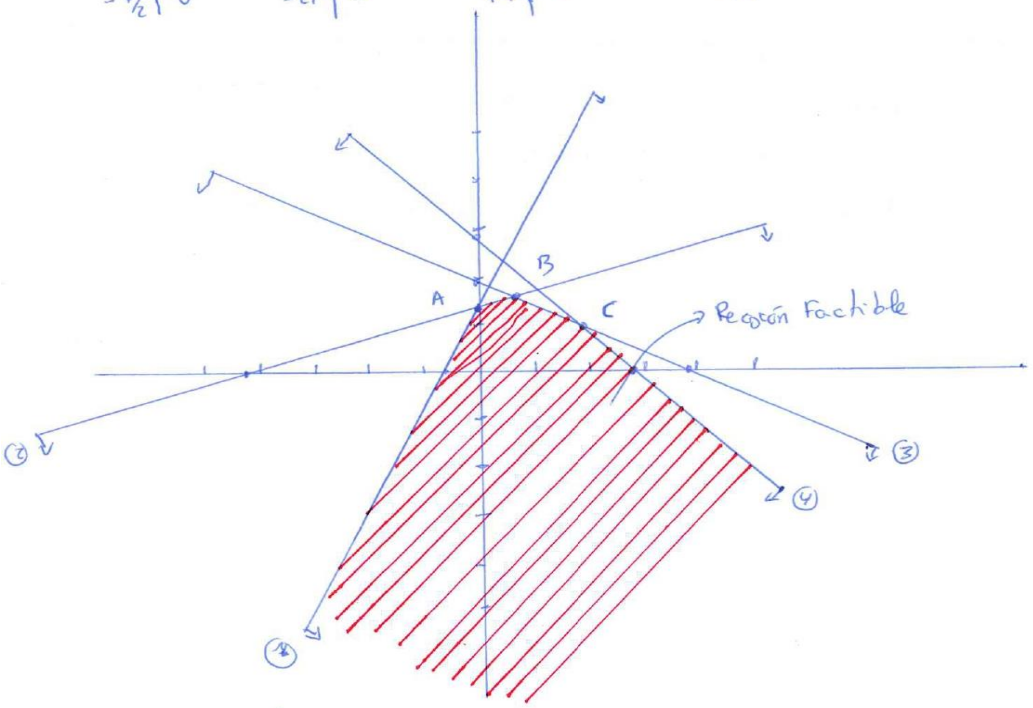
x	y
0	7
-21	0

③

x	y
0	$19/2$
19	0

④

x	y
0	14
14	0



Calculemos vertices

A (0,7)

B $\rightarrow \begin{cases} -x + 3y = 21 \\ x + 2y = 19 \end{cases}$ $\quad$ B (3,8)

$5y = 40 \rightarrow y = 8$, $x = 3$

C $\rightarrow \begin{cases} x + 2y = 19 \\ x + y = 14 \end{cases}$ $\quad$ C (9,5)

$y = 5 \quad x = 9$

b) $F(x,y) = x + 4y$

$A \to F(0,7) = 28$

$B \to F(3,8) = 35 \to$ Valor máximo

$C \to F(9,5) = 29$

No hay mínimo al ser ingenita la region factible, no está acotada

c) El 40 no puede tomarlo porque tenemos el máximo en 35, pero si el 20, por ejemplo el (0,5) que está dentro de la region factible, ya que el máximo es 35 y F toma los valores inferiores a 35

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

a) (1 punto) Se considera la función $f(x)= x^3+bx^2+cx-1$ donde b y c son números reales. Determine el valor de b y c para que la función f presente un extremo en el punto de abscisa x=1/3 y además la gráfica de la función f pase por el punto (-2,-3).

b) (1,5 puntos) Dada la función $g(x)=-x^3-x^2+x+1$, realice el esbozo de su gráfica, estudiando los puntos de corte con los ejes coordenados y su monotonía. Determine el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función g y el eje de abscisas.

Solución: a) b=1, c=-1 b) 4/3 u^2

a) $f(x) = x^3 + bx^2 + cx - 1$

Extremo en $x = \frac{1}{3} \to f'(\frac{1}{3}) = 0$

Pase $(-2,-3) \to f(-2) = -3$

$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c \to 3(\frac{1}{3})^2 + 2b\frac{1}{3} + c = 0 \to \frac{1}{3} + \frac{2}{3}b + c = 0 \to$

$2b + 3c = -1$

$f(-2) = -3 \to -3 = -8 + 4b - 2c - 1 \to 4b - 2c = 6 \to 2b - c = 3$

Resolvemos sistema

$$\begin{array}{l} 2b + 3c = -1 \\ 2b - c = 3 \\ \hline 4c = -4 \end{array} \to \begin{array}{l} b = 1 \\ c = -1 \end{array}$$

b) $g(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$

Puntos corte

$y = 0 \rightarrow -x^3 - x^2 + x + 1 = 0$

	-1	-1	1	1
1		-1	-2	-1
	-1	-2	-1	0

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{-2} = -1$

$(1,0)\ ;\ (-1,0)\ ;\ (0,1)$

$x = 0 \rightarrow y = 1$

$g'(x) = -3x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{-6} = \dfrac{2 \pm 4}{-6} \begin{cases} -1 \\ 1/3 \end{cases}$

Signo $g'(x)$: $-$ (decrece) | -1 | $+$ (crece) | $1/3$ | $-$ (decrece)

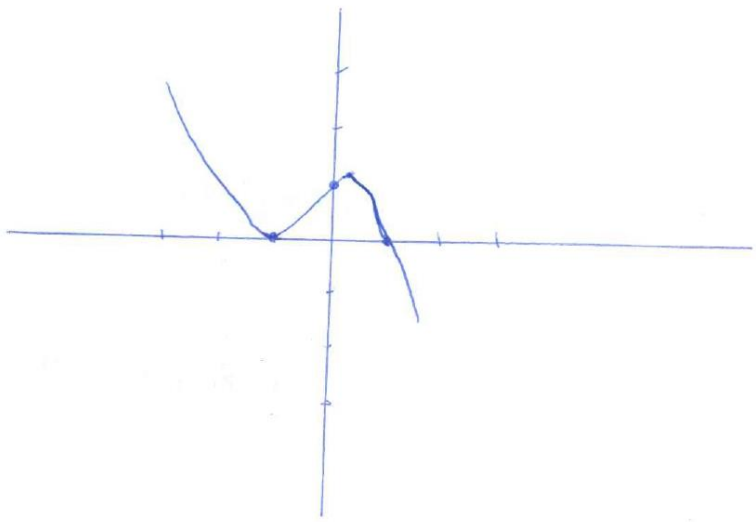
Decrece $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$

Crece $(-1, 1/3)$

Mínimo $(-1, 0)$

Máximo $(\frac{1}{3}, \frac{32}{27})$

Obtenemos gráfica



El área

$$A = \int_{-1}^{1} (-x^3 - x^2 + x + 1)\,dx = -\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{-3-4+6+12}{12} - \frac{-3+4+6-12}{12} =$$

$$= \frac{11}{12} - \frac{-5}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}\ u^2$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2,5 puntos)
El beneficio, en miles de euros, que se obtiene en una pequeña finca familiar por la venta de aceitunas, en miles de kilogramos, viene dado por la siguiente función:

$$B(x) = -0.02x^2 + 1.3x - 15, \quad x \geq 0$$

a) (0,75 puntos) Represente la función beneficio y calcule los puntos de corte con el eje OX.
b) (0,5 puntos) ¿Para qué valores de x la finca no tiene pérdidas?
c) (0,5 puntos) ¿Para qué número de kilogramos el beneficio será máximo? ¿Cuánto vale dicho beneficio?
d) (0,75 puntos) ¿Cuántos kilogramos debe vender para obtener un beneficio de 5000€?

Solución: a) (15,0), (50,0) b) (15,50) c) 32,5; 6125€ d) 25 y 40

$B(x) = -0,02x^2 + 1,3x - 15 \quad x \geq 0$

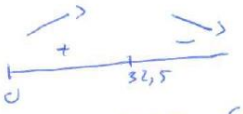
a)

Puntos corte $y = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1,3 \pm \sqrt{1,3^2 - 4 \cdot 0,02 \cdot 15}}{-2 \cdot 0,02} = \begin{cases} 15 & (15,0) \\ 50 & (50,0) \end{cases}$

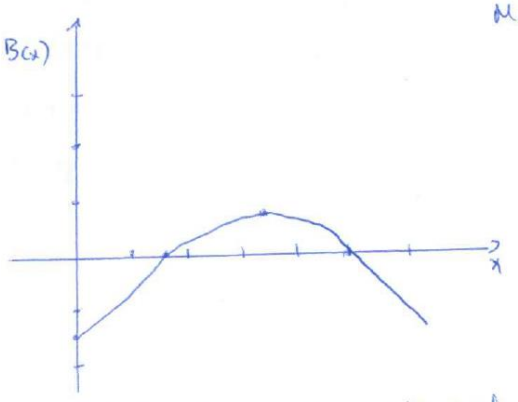
$x = 0 \quad y = -15 \quad (0,-15)$

Estudiamos monotonía

$B'(x) = -0,04x + 1,3 = 0 \rightarrow x = 32,5$



Máximo (32,5 ; 6,125)



b) No tiene pérdidas en [15, 50] miles de kilogramos de aceitunas

c) Tendremos el máximo en 32,5 miles de kilogramos de aceitunas con un beneficio de 6,125 miles de euros

d) $B(x) = 5 \quad 5 = -0,02x^2 - 1,3x - 15 \rightarrow -0,02x^2 + 1,3x - 20 = 0$

$x = \dfrac{-1,3 \pm \sqrt{1,3^2 - 4 \cdot 0,02 \cdot 20}}{-2 \cdot 0,02} = \begin{cases} 40 \\ 25 \end{cases}$

Puede vender 25 ó 40 miles de kilogramos de aceitunas para obtener beneficio de 5000 euros

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2,5 puntos)
En una determinada región hay tres universidades A, B y C. De los estudiantes que terminaron sus estudios el año pasado, el 60% procedían de la universidad A, el 30% de la universidad B y el resto de C. Además, se conoce que la probabilidad de que un estudiante de la universidad A no encuentre trabajo en su región es 0,4 y para un estudiante de B es 0,5

a) (1,5 puntos) Si la probabilidad de que un estudiante no encuentre trabajo en su región es 0.395, determine la probabilidad de que un estudiante de la universidad C encuentre trabajo en su región.

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un estudiante que no haya encontrado trabajo en su región proceda de la universidad A o de la B.

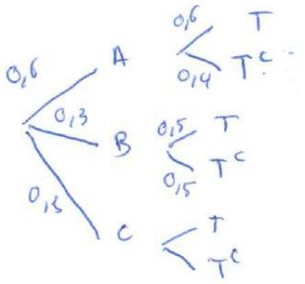
Solución: a) 0,95 b) 0,9873

$P(A) = 0,6$

$P(B) = 0,3$

$P(C) = 0,1$

Construimos el arbol



a) $P(T^c) = 0,395$ $\quad P(T/C) = ?$

$P(T) = 1 - 0,395 = 0,605$

$P(T) = P(A)\,P(T/A) + P(B)\,P(T/B) + P(C)\,P(T/C)$

$0,605 = 0,6 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot P(T/C)$

$P(T/C) = 0,95$ // $\quad P(T^c/C) = 0,05$

b) $P(A \cup B / T^c) = 1 - P(C / T^c)$

Aplicamos teorema de Bayes

$$P(C/T^c) = \frac{P(T^c/C) \cdot P(C)}{P(T^c)} = \frac{0,05 \cdot 0,1}{0,395} = 0,0126$$

$P(A \cup B / T^c) = 1 - 0,0126 = 0,9873$ //

Ejercicio 6. (Calificación máxima: 2,5 puntos)
Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral tales que:

$$P(A \cup B) = \frac{3}{7}, \quad P(A^C) = \frac{5}{7}, \quad P(B^C) = \frac{2}{3}$$

a) (1 punto) ¿Son A y B independientes? ¿Son A y B incompatibles?
b) (0,75 puntos) Calcule $P(A^C \cap B^C)$.
c) (0,75 puntos) Calcule P (B/A^C).

Solución: a) No, no b) 4/7 c) 1/5

$P(A \cup B) = \frac{3}{7}$

$P(A^c) = \frac{5}{7} \rightarrow P(A) = \frac{2}{7}$

$P(B^c) = \frac{2}{3} \rightarrow P(B) = \frac{1}{3}$

a) Independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Incompatibles si $P(A \cap B) = 0 \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \rightarrow \frac{3}{7} = \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \rightarrow \frac{3}{7} \neq \frac{13}{21}$ No son incompatibles

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{2}{7} + \frac{1}{3} - \frac{3}{7} = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{4}{21}$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \rightarrow \frac{4}{21} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4}{21} \neq \frac{2}{21}$ No son independientes

b) $P(A^c \cap B^c)$

Por Leyes de Morgan

$P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$ //

c) $P(B/A^c) = \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(B) - P(B \cap A)}{P(A^c)} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{4}{21}}{5/7} = \frac{\frac{3}{21}}{5/7} = \frac{1}{5}$ //

Ejercicio 7. (Calificación máxima: 2,5 puntos)
Una fábrica de tornillos quiere hacer un estudio sobre la proporción de tornillos que cumplen las especificaciones del fabricante. Para ello ha seleccionado una muestra aleatoria de 1500 tornillos, resultando que 1425 cumplen las especificaciones del fabricante.

a) (1.5 puntos) Determine un intervalo de confianza para la proporción de tornillos que cumplen con las especificaciones del fabricante con un nivel de confianza del 97%.
b) (1 punto) Manteniendo la proporción muestral y el nivel de confianza del apartado anterior, ¿cuál tendría que ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1%?

Solución: a) IC=(0,9378;0,9622) b) n=2237

$n = 1500$

$\mu = 1425$

a) $I.C\left(p \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{q \cdot p}{n}}\right)$

$1-\alpha = 0,97 \rightarrow \alpha/2 = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$

$p = \frac{1425}{1500} = 0,95 \qquad q = 1-p = 0,05$

$IC\left(0,95 \pm 2,17\sqrt{\frac{0,05 \cdot 0,95}{1500}}\right) = (0,95 \pm 0,0122)$

$IC = (0,9378 ; 0,9622)$

b) $p = 0,95 \qquad z_{\alpha/2} = 2,17 \qquad E < 1\% \qquad n?$

$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \rightarrow 0,01 = 2,17\sqrt{\frac{0,95 \cdot 0,05}{n}} \rightarrow (4,6 \cdot 10^{-3})^2 = \left(\sqrt{\frac{0,95 \cdot 0,05}{n}}\right)^2$

$n = \frac{0,95 \cdot 0,05}{2,12 \cdot 10^{-5}} = 2236,72$

Para que el error sea inferior al 1% ha de tomarse 2237 muestras.

Ejercicio 8. (Calificación máxima: 2,5 puntos)
El número de días que los titulados en un cierto máster tardan en encontrar su primer trabajo sigue una distribución Normal de media μ desconocida y desviación típica 3 días.

a) (1 punto) Se elige una muestra aleatoria de 100 titulados obteniéndose una media muestral de 8.1 días. Calcule un intervalo de confianza al 97% para estimar la media poblacional.
b) (1 punto) Con un nivel de confianza del 92%. calcule el tamaño muestral mínimo necesario para que el error cometido, al estimar el número medio de días que estos titulados tardan en encontrar trabajo, sea inferior a un día
c) (0.5 puntos) Suponiendo μ = 7.61 días y tomando muestras aleatorias de 36 titulados, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria media muestral? ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea superior a 8 días?

Solución: a) IC=(7,449;8,751) b) n=28 c) N(7,61, 0,5); 0,2177

$N(\mu, \sigma=3)$

a) $n=100$
$\mu=8,1$
$1-\alpha=0,97 \rightarrow \alpha/2=0,985 \rightarrow z_{\alpha/2}=2,17$

$IC\left(\mu \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$IC=\left(8,1 \pm 2,17\frac{3}{\sqrt{100}}\right)=(8,1 \pm 0,651)$

$IC=(7,449;\ 8751)$

b) $1-\alpha=0,92 \rightarrow \alpha/2=0,96 \rightarrow z_{\alpha/2}=1,75$
$E<1$ $n?$

$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n}=\frac{z_{\alpha/2}\,\sigma}{E}=\frac{1,75\cdot 3}{1} \rightarrow n=27,56$

Ha de tomarse 28 muestras como mínimo

c) $X=N(7,61,3)$

$n=36 \rightarrow \bar{X}_{36}$ es una distribución normal de la misma media que X y desviación típica $\sigma=\frac{3}{\sqrt{36}}=0,5$

$X=N(7,61;\ 0,5)$

$P(X>8)=P\left(Z>\frac{8-7,61}{0,5}\right)=P(Z>0,78)=1-P(Z<0,78)=$

$=1-0,7823=0,2177$