MATEMÁTICAS II

JUNIO 2021

Ejercicio 1. (Álgebra)

a) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema de ecuaciones lineales siguiente.

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x+y+\lambda z=0 \end{cases}$$

(1,2 puntos)

b) Resolverlo para λ=-1. (0,8 puntos)

Solución:

a) Discutir según los valores del parámetro λ

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x+y+\lambda z=0 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & 0 \end{array}\right)$$

Estamos ante un sistema homogéneo por tanto el rango de A será igual que el rango de A^* . Estudiamos el determinante de la matriz A.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda+1+2-(1-\lambda-2\lambda)=3+3=0 \Rightarrow \lambda=-1$$

- $\lambda \neq -1 \quad rango A = rango A^* = 3 = nº\ incógnitas$

$$SISTEMA\ COMPATIBLE\ DETERMINADO$$

- $\lambda = -1$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \quad rango A = rango A^* = 2 < nº\ incógnitas$$

$$SISTEMA\ COMPATIBLE\ INDETERMINADO$$

b) λ=-1

$nº\ indeterminaciones = nº\ de\ incógnitas - rango = 3-2 = 1\ indeterminación$

$Como\ el\ rango\ es\ 2, cogeremos\ dos\ ecuaciones.$

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$$

$$3x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\gamma \\ z=\gamma \end{cases}$$

<u>Ejercicio 2.</u> (Álgebra)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Determinar los valores de n para los que la matriz A^2 tiene inversa. (1 puntos)
b) Para n=2, hallar la matriz X que verifica la ecuación AX+A=2I, siendo I la matriz identidad de orden 2. (1,5 puntos)

Solución:

a) Una matriz tendrá inversa si su determinante es distinto de 0. Primero calcularemos A^2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n-1)^2 & 0 \\ n-2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = (-n+1)^2 = 0 \Rightarrow n = 1$$

$$|A| = \begin{vmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -n+1$$

Existe la inversa de A^2 para los valores $n \neq 1$.

b) $Para\ n = 2\ tenemos$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = 2I - A \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(2I - A) \Rightarrow X = A^{-1}(2I - A)$$

Calculamos A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 - F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1)F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$2I - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(2I - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

<u>Ejercicio 3.</u> (Geometría)

a) Hallar la recta perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + z = 1$, que pasa por el punto A=(0,0,0). (0,8 puntos)
b) Calcular la ecuación del plano respecto del cual los puntos P=(1,1,1) y Q=(1,3,-1) son simétricos. (1,2 puntos)

Solución:

a) Para obtener la ecuación de una recta necesitamos un punto y un vector.

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{n_\alpha} = (1,1,1)\ y\ A = (0,0,0)$$

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow x = y = z$$

b) $recta\ r: \begin{cases} P = (1,1,1) \\ \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{PQ} = (0,2,-2) \end{cases}$

$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{n_\alpha},$
$por\ tanto\ para\ conocer\ la\ ecuación\ del\ plano\ solo\ necesitamos\ un\ punto\ que\ pertenezca\ al\ plano. Ese\ punto\ será\ el\ punto\ medio\ entre\ P\ y\ Q.$

$$x_m = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

$$y_m = \frac{1}{2}(1+3) = 2$$
$$z_m = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$
$$Utilizando\ la\ ecuación\ normal\ del\ plano\ tenemos:$$
$$0x + 2y - 2z + D = 0 \Rightarrow 2\cdot 2 - 2\cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = 4$$
$$\pi \equiv 2y - 2z - 4 = 0 \Rightarrow \pi \equiv y - z - 2 = 0$$

<u>Ejercicio 4.</u> (Geometría)

Dados la recta $r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2}$ y el punto P=(0,0,0), hallar la ecuación del plano π que contiene a r y pasa por el punto P. (2 puntos)

Solución:

$$r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2} \quad P(0,0,0)\ y\ P_r = (-1,2,0)$$
$$\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{P_rP} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{j} + 2\vec{k} - \left(\vec{k} + 4\vec{\imath}\right) = (-4,-2,1)$$
$$\pi \equiv -4x - 2y + z + D = 0 \Rightarrow -4\cdot 0 + 2\cdot 0 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0$$
$$\pi \equiv -4x - 2y + z = 0$$

<u>Ejercicio 5.</u> (Análisis)

Representar la función $f(x) = e^{(x^2)}$, determinando antes sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad y sus asíntotas.

Solución:

$f(x) = e^{(x^2)}$,

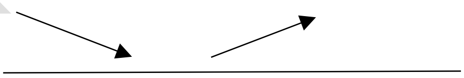
- $Dom = \mathbb{R}$
- $No\ hay\ asíntotas\ verticales\ porque\ el\ domiio\ es\ toda\ la\ recta\ real$

$Asíntotas\ horizontales:\ \lim_{x\to+\infty} e^{(x^2)} = \infty\ ,\ \ \lim_{x\to-\infty} e^{(x^2)} = \infty$

$No\ ha\ asíntotas\ oblicuas\ porque\ hay\ asíntotas\ horizontales$

- $Máximos\ y\ mínimos:$

$$f'(x) = e^{(x^2)}\cdot 2x = 0 \Rightarrow e^{(x^2)} \neq 0, \qquad 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$



Signo f'(x) - 0 +

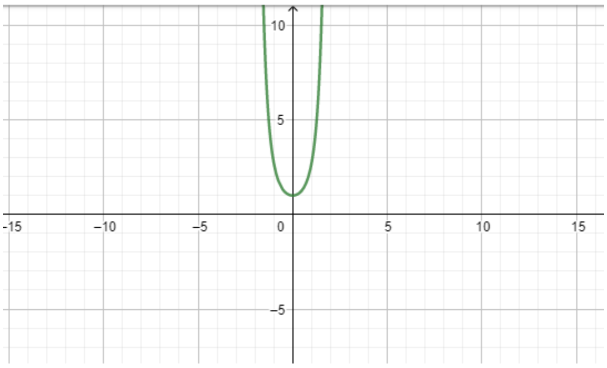
En x=0 tenemos un mínimo.

$f(0) = e^{(0^2)} = 1$

- Concavidad y convexidad.

  $f''(x) = e^{(x^2)}\cdot 2x\cdot 2x + e^{(x^2)}\cdot 2 = e^{(x^2)}\cdot 4x^2 + e^{(x^2)}\cdot 2 = 2\cdot e^{(x^2)}(2x^2+1) = 0$

  $La\ segunda\ derivada\ no\ se\ anula\ nunca, siempre\ es\ > 0$



Ejercicio 6. (Análisis)

Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-cos3x}{sen^2x}$ (2 puntos)

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-cos3x}{sen^2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=_{L'H}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+3\cdot sen3x}{2\cdot senx\cdot cosx}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+3\cdot sen3x}{sen2x}$$
$$=\left(\frac{0}{0}\right)=_{L'H}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+9\cdot cos3x}{2\cdot cos2x}=\frac{10}{2}=5$$

Ejercicio 7. (Análisis)

a) Dadas las funciones $f(x)=x^2, g(x)=-x^2+8$, hallar los valores de $x\in\mathbb{R}$ para los que $g(x)\geq f(x)$. (0,5 punto)
b) Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones f(x) y g(x). (1,5 punto)

Solución:

a) Igualamos ambas funciones para poder estudiar el signo de cada una de las funciones.

$$x^2=-x^2+8\Rightarrow 2x^2=8\Rightarrow x=\pm 2$$
$$(-\infty,-2)\ f(x)\geq g(x)$$
$$(-2,2)\ g(x)\geq f(x)$$
$$(2,+\infty\ )\ f(x)\geq g(x)$$

b)

$$\int_{-2}^{2}-x^2+8-x^2\,dx=\int_{-2}^{2}-2x^2+8\,dx=-\frac{2x^3}{3}+8x\Big]_{-2}^{2}=\frac{64}{3}u^2$$

Ejercicio 8. (Análisis)

Hallar los valores de a, b y c para los cuales le polinomio $P(x)=ax^2+bx+c$ cumple las siguientes condiciones:

- P(0)= 1
- La pendiente de la recta tangente a la gráfica de P(x) en x= 0 es m= 1.
- $\int_0^2 P(x)dx=12$

(2 puntos)

Solución:

- $P(0) = 1 \Rightarrow 1 = c$

  $P'(0) = -1 \Rightarrow P'(x) = 2ax + b \Rightarrow P'(0) = b = 1$

  $$\int_0^2 P(x)dx = 12 \Rightarrow \int_0^2 ax^2 + bx + c\, dx = \int_0^2 ax^2 + x + 1\, dx = \frac{ax^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\Big]_0^2$$

  $$= \frac{8}{3}a + 2 + 2 = 12 \Rightarrow \frac{8}{3}a = 12 \Rightarrow a = 3$$

<u>Ejercicio 9.</u> (Probabilidad y estadística)
En el club deportivo, el 55% de los socios son hombres y el 45% mujeres. Entre los socios, el 60% de los hombres practica natación, así como el 40% de las mujeres.

a) Describir los sucesos y sus probabilidades, y calcular la probabilidad de que un socio elegido al azar practique natación. (1,25 puntos)
b) Sabiendo que una persona practica natación, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer? (0,75 puntos)

Solución:

a)

$$P(H \cap N) = p(H) \cdot p(N) = 0{,}55 \cdot 0{,}6 = 0{,}33$$
$$P(H \cap \overline{N}) = p(H) \cdot p(\overline{N}) = 0{,}55 \cdot 0{,}4 = 0{,}22$$
$$P(M \cap N) = p(M) \cdot p(N) = 0{,}45 \cdot 0{,}4 = 0{,}18$$
$$P(M \cap \overline{N}) = p(M) \cdot p(\overline{N}) = 0{,}45 \cdot 0{,}6 = 0{,}27$$

La probabilidad de que un socio practique natación será:

$$p(N) = P(H \cap N) + P(M \cap N) = 0{,}33 + 0{,}18 = 0{,}51$$

b)

$$p\left({}^{M}/_{N}\right) = \frac{p(M \cap N)}{p(N)} = \frac{0{,}18}{0{,}51} = 0{,}352$$

<u>Ejercicio 10.</u>
(Probabilidad y estadística)
El tiempo empleado, en minutos, para obtener la respuesta de un test para detectar cierta enfermedad sigue una distribución normal de media 20 y de desviación típica 4.

a) ¿En qué porcentaje de test se obtiene el resultado entre 16 y 26 minutos? (1 punto)
b) ¿Cuántos minutos son necesarios para garantizar que se ha obtenido la respuesta del 96,41% de los test? (1 puntos)

Solución:

a) $N(20{,}4)$

$$p(16 \le x \le 26) = p\left(\frac{16-20}{4} \le z \le \frac{26-20}{4}\right) = p(-1 \le z \le 1{,}5) =$$
$$= p(z \le 1{,}5) - p(z \le -1) = p(z \le 1{,}5) - p(z \ge -1) =$$
$$= p(z \le 1{,}5) - [1 - p(z \le 1)] = 0{,}9332 - [1 - 0{,}8413] =$$
$$= 0{,}77$$

b) $96{,}41\% \Rightarrow p(z \le k) = 0{,}9641$

$$1{,}80 = \frac{x-20}{4} \Rightarrow x = 27{,}2\, minutos$$