



OPCIÓN A

Ejercicio 1: Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{l} -mx + my + z = 0 \\ x - my + 3z = 4 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{array} \right.$$

a) Discutir según los valores del parámetro m.

$$A = \begin{pmatrix} -m & m & 1 \\ 1 & -m & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} -m & m & 1 & 0 \\ 1 & -m & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0 \quad \begin{vmatrix} -m & m & 1 \\ 1 & -m & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -m^2 - 2 + 6m + 2m - 6m + m = 0$$

$$-m^2 + 3m - 2 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado: $m_1=2$ y $m_2=1$.

- Si $m \neq 2$ y $m \neq 1 \Rightarrow \text{rg}(A)=\text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} \Rightarrow$ Sistema compatible determinado
- Si $m = 2$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r(A): \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 2 = 8 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$$

$$r(A^*): \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0$$

$$r(A^*): \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -8 + 8 = 0$$

Como $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) < \text{nº incógnitas} \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

- Si $m = 1$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$rg(A): \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$$

$$rg(A^*): \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -8 + 4 = -4 \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 3$$

Como $rg(A) \neq rg(A^*) \Rightarrow$ Sistema incompatible

b) Resolver en caso de $m=0$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z=0 \\ x+3z=4 \\ 2x-2y-z=0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} z=0 \\ x=4 \\ 8-2y=0; y=4 \end{array} \right.$$

Solución: $(x, y, z) = (4, 4, 0)$

c) Resolver en el caso $m=2$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2x+2y=-z \\ x-2y=4-3z \\ -x=-4z+4 \Rightarrow x=4z-4 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} -8z+8+2y=-z \Rightarrow 2y=7z-8 \Rightarrow y=(7z-8)/2 \end{array} \right.$$

Solución: $x=4t-4; y=(7t-8)/2; z=t$

Ejercicio 2: La recta r pasa por $P(2, -1, 0)$ y tiene vector director $(1, \lambda, -2)$; la recta s pasa por $Q(1, 0, -1)$ y tiene vector director $(2, 4, 2)$.

a) Calcular $\lambda > 0$ para que la distancia entre r y s sea $9/\sqrt{59}$

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|}$$

$$PQ = (-1, 1, -1)$$

$$|\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -2\lambda - 4 - 4 + 2\lambda - 2 - 8 = -18$$



$$|\vec{u_r} \times \vec{u_s}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \lambda & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (2\lambda + 8)\vec{i} - 6\vec{j} + (4 - 2\lambda)\vec{k}$$

$$\frac{9}{\sqrt{59}} = \frac{-18}{\sqrt{(2\lambda + 8)^2 + (-6)^2 + (4 - 2\lambda)^2}}$$

Desarrollando y despejando la ecuación queda:

$$8\lambda^2 + 16\lambda - 120 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado se obtiene: $\lambda = 5$

$$\lambda = -3 \text{ (solución no válida)}$$

- b) Calcula λ para que r sea perpendicular a la recta que pasa por P y Q.

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = (-1, 1, -1) \cdot (1, \lambda, -2) = -1 + \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Ejercicio 3:

- a) Estudiar el crecimiento de la función $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.

$$f'(x) = 2 + 6x + 12x^2 \Rightarrow 12x^2 + 6x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 96}}{24}$$

$f(x)$ no presenta máximos ni mínimos.

$f'(0) = 2 > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en todo su dominio.

- b) Demostrar que la ecuación $1+2x+3x^2+4x^3=0$ tiene una única solución real y localizar un intervalo de longitud 1 que la contenga.

Teorema de Bolzano:

$$f(0)=1$$

$$f(-1)=1-2+3-4=-2$$

En el intervalo $(-1, 0)$ $f(x)$ tiene una solución real.

Ejercicio 4:

- a) Calcular la integral definida $\int_1^4 (1-x)e^{-x} dx$

$$\begin{aligned} u &= 1-x & \Rightarrow & \quad du = -dx \\ dv &= e^{-x} dx & \Rightarrow & \quad v = -e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^4 (1-x)e^{-x} dx &= -(1-x)e^{-x} - \int e^{-x} dx \Big|_1^4 = -e^{-x}(1-x) + e^{-x} \Big|_1^4 = x e^{-x} \Big|_1^4 \\ &= \frac{4}{e^4} - \frac{1}{e^1} = \frac{4 - e^3}{e^4} \end{aligned}$$



b) Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} (1-x)e^{-x}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^{-x}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1-x)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x) \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1+x) \cdot e^x = +\infty$$