

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea A una matriz de tamaño 3×4 tal que sus dos primeras filas son $(1, 1, 1, 1)$ y $(1, 2, 3, 4)$, y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz A que verifique la condición pedida, **justificándolo apropiadamente**:

- (0.5 puntos) La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.
- (0.5 puntos) Las tres filas de A son linealmente independientes.
- (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.
- (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.
- (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x < 1, x \neq -1 \\ \frac{x^2+1}{4x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, se pide:

- (0.5 puntos) Calcular $f(0)$ y $(f \circ f)(0)$.
- (1.25 puntos) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.
- (0.75 puntos) Estudiar sus asíntotas.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto $P(3, 3, 0)$ y la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$, se pide:

- (0.75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r .
- (1 punto) Calcular el punto simétrico de P respecto de r .
- (0.75 puntos) Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $\frac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recto en A .

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tienen tres urnas A , B y C . La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 negras, la urna B contiene 3 bolas de cada color y la urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento. Se pide:

- (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.
- (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra.
- (0.5 puntos) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

- (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A .
- (0.5 puntos) Calcular la matriz $C = A^2 - 2I$.
- (1 punto) Calcular el determinante de la matriz $D = ABB^t$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La potencia generada por una pila viene dada por la expresión $P(t) = 25te^{-t^2/4}$, donde $t > 0$ es el tiempo de funcionamiento.

- (0.5 puntos) Calcular hacia qué valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.
- (0.75 puntos) Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.
- (1.25 puntos) La energía total generada por la pila hasta el instante t , $E(t)$, se relaciona con la potencia mediante $E'(t) = P(t)$, con $E(0) = 0$. Calcular la energía producida por la pila entre el instante $t = 0$ y el instante $t = 2$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Del paralelogramo $ABCD$, se conocen los vértices consecutivos $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 0)$ y $C(4, 3, -2)$. Se pide:

- (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC .
- (1 punto) Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.
- (0.5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores \vec{AB} y \vec{AC} .

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes X, Y . Sabemos que $P(X) = 0.4$ y que $P(X \cap \bar{Y}) = 0.08$ (donde \bar{Y} es el suceso complementario de Y). Se pide:

- (1 punto) Calcular $P(Y)$.
- (0.5 puntos) Calcular $P(X \cup Y)$.
- (1 punto) Si X es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede X , y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A.1.

En cada apartado, por dar el ejemplo 0.25 puntos; por la justificación de que cada ejemplo cumple el enunciado, 0.25 puntos.

Estándares evaluables: Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes. Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos.

A.2.

a) Por cada valor obtenido: 0.25 puntos.

b) Por el estudio de la continuidad: 0.5 puntos. Por el estudio de la derivabilidad: 0.5 puntos. Por caracterizar el extremo: 0.25 puntos.

c) Por cada asíntota: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como teoremas relacionados, a la resolución de problemas.

A.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

c) Planteamiento: 0.5 puntos. Encontrar una solución correcta: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades.

A.4.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes.

B.1.

- la Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
- b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
- c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Determina las condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado. Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente.

B.2.

- a) Planteamiento: 0.25 puntos. Cálculo de límite: 0.25 puntos.
- b) Planteamiento: 0.25 puntos. Cálculo del instante: 0.25 puntos. Cálculo del máximo: 0.25 puntos.
- c) Planteamiento: 0.5 puntos. Cálculo de la primitiva: 0.5 puntos. Aplicación de la regla de Barrow: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.

B.3.

- a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
- b) Si se determina el vértice D : 0.5 puntos (repartidos entre planteamiento: 0.25 y resultado: 0.25). Si se determina el área: 0.5 puntos (repartidos entre planteamiento: 0.25 y resultado: 0.25).
- c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Realiza operaciones elementales con vectores, manejando correctamente los conceptos de base y de dependencia e independencia lineal. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos. Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas.

B.4.

- a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
- b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
- c) 0.5 puntos por identificar la binomial; 0.5 puntos por el resultado.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral. Identifica fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial, obtiene sus parámetros y calcula su media y desviación típica. Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora.