



## MATEMÁTICAS CCSS

JUNIO 2021

### OPCIÓN A

**Ejercicio A1.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros reales a y b para los que  $A = A^{-1}$

b) Para  $a = b = 2$ , calcule la matriz inversa de A.

**Solución:**

a) Si  $A = A^{-1} \xrightarrow{A \cdot A^{-1} = I} A \cdot A = I \rightarrow A^2 = I$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 1 & 0 & 2a \\ 0 & b^2 & 0 \\ 2a & 0 & a^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\xrightarrow{\text{Igualando}} \begin{cases} a^2 + 1 = 1 \\ 2a = 0 \\ b^2 = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Resolviendo}} \begin{cases} a = 0 \\ b = \pm 1 \end{cases}$$

b)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A^t)_{Adj}$

$$|A| = 6 \quad A^t = A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (A^t)_{Adj} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto: } A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio A2.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2 - 1}$$

a) Determine el dominio de f(x) y calcule sus asíntotas.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x=0.

**Solución:**

a) Dominio

$$\text{Dom } f(x): x \in \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 = 0\} \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$



Por tanto:  $\text{Dom } f(x): x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

Asíntotas

A.V.

$$\text{En } x = 1 \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3+4}{x^2-1} = \frac{5}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3+4}{x^2-1} = \frac{5}{0^-} = -\infty \end{cases} \quad \text{En } x = -1 \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3+4}{x^2-1} = \frac{5}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3+4}{x^2-1} = \frac{5}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

A.O. La asíntota oblicua tiene como ecuación de la recta:  $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+4}{x^3-x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+4}{x^2-1} - 1x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+4}{x^2-1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Por tanto:  $y = x$  es asíntota oblicua.

A.H. No hay asíntota horizontal, dado que ya hay asíntota oblicua.

b) Derivamos,  $f(x)$  pues vamos a necesitar  $f'(x)$ :

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 1) - (x^3 + 4) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2 - 8x}{(x^2 - 1)^2}$$

La ecuación de la recta tangente es:  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ , donde:

- $x_0 = 0$
- $y_0 = f(0) = -4$
- $f'(x_0) = f'(0) = 0$

Por tanto:  $y - (-4) = 0 \cdot (x - 0) \rightarrow y = -4$  es la ecuación de la recta tangente.

### **Ejercicio A3.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

denotando por  $\ln$  la función logaritmo neperiano.

a) Determine para qué valores de  $a \in \mathbb{R}$  la función  $f(x)$  es continua en  $\mathbb{R}$ .

b) Para  $a = 1$ , halle el área de la región acotada delimitada por la función  $f(x)$ , el eje de abscisas y las rectas  $x = -1$ ,  $x = 0$ .

**Solución:**



a)  $f(x)$  es continua en  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow$  continuidad en  $x = 1$

Continuidad en  $x=1$

- $f(1) = 1 - a$
- $L^+ = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = \ln 1 = 0$
- $L^- = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - ax = 1^2 - a \cdot 1 = 1 - a$

Para que  $f(x)$  sea continua en  $x=1$ :  $f(1) = L^+ = L^- \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$

Por tanto, para que  $f(x)$  sea continua en  $x \in \mathbb{R} \Rightarrow a = 1$

b) Para  $a=1 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Lo primero es ver si  $f(x)$  corta al eje  $x$  en algún punto de ese intervalo, por si hubiere que desdoblarse la integral:

$$\Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{No corta dentro del intervalo } [-1, 0]$$

Por tanto, el área pedida será:

$$A = \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (x^2 - x) dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = \left( \frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2} \right) - \left( \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} \right)$$

$$A = \frac{5}{6} u^2$$

**Ejercicio A4.** (Calificación máxima: 2 puntos)

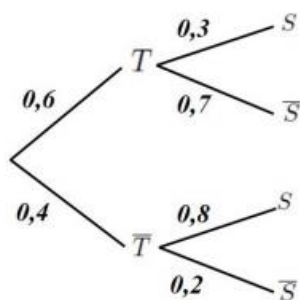
El 60 % de los empleados de una multinacional teletrabaja desde que se declaró la situación de emergencia sanitaria por Covid-19. De estos, el 30 % padece trastornos del sueño, mientras que este porcentaje se eleva al 80 % para aquellos empleados que no teletrabajan. Seleccionado un empleado al azar, calcule la probabilidad de que:

a) No tenga trastornos del sueño y teletrabaje.

b) No teletrabaje, sabiendo que no tiene trastornos del sueño.

Solución:

$T$ : teletrabaja,  $\bar{T}$ : no teletrabaja,  $S$ : trastorno de sueño,  $\bar{S}$ : no trastorno sueño



a)  $P(\bar{S} \cap T) = P(T) \cdot P(\bar{S}/T) = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42$

b)  $P(\bar{T} / \bar{S}) = \frac{P(\bar{T} \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{P(\bar{T}) \cdot P(\bar{S} / \bar{T})}{P(\bar{S})} = \frac{0,4 \cdot 0,2}{0,6 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,2}$   
 $= 0,16$



**Ejercicio A5.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Se quiere evaluar el uso de las redes sociales por parte de los menores de 14 años.

a) Se toma una muestra de 500 menores de 14 años, de los cuales 320 tienen cuenta en alguna red social. Calcule el intervalo de confianza al 96 % para estimar la proporción de menores de 14 años que tienen cuenta en alguna red social.

b) Suponiendo que la proporción poblacional es  $P = 0,5$ , determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de menores de 14 años para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 5 %.

Solución:

a) El IC pedido será:  $IC = \left( pr - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot (1-pr)}{n}}, pr + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot (1-pr)}{n}} \right)$ , donde:

- $pr = \frac{320}{500} = 0,64$
- $n = 500$
- $z_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow 1 - \alpha = 0,96 \Rightarrow \alpha = 0,04 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,02 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,98 \Rightarrow P(z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,98$   
 $\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,055$

Por lo que, sustituyendo:

$$IC = \left( 0,64 - 2,055 \cdot \sqrt{\frac{0,64 \cdot (1 - 0,64)}{500}}; 0,64 + 2,055 \cdot \sqrt{\frac{0,64 \cdot (1 - 0,64)}{500}} \right) \Rightarrow$$

$$IC = (0,5959; 0,6841) = (59,59\%; 68,41\%)$$

b) El error máximo es:  $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \Rightarrow n = \frac{\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot p \cdot (1-p)}{E^2}$ , donde:

- $p = 0,5$
  - $E = 0,05$
- $$z_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow 1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Rightarrow P(z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,975$$
- $$\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

Por lo que, sustituyendo:

$$n = \frac{1,96^2 \cdot 0,5 \cdot 0,5}{0,05^2} = 384,16$$

Por tanto, el tamaño mínimo de la muestra ha de ser  $n=385$  personas



## OPCIÓN B

### **Ejercicio B1.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real  $a$ :

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ x - y + a^2 z = 3 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro  $a$ .

b) Resuelva el sistema para  $a = 1$ .

**Solución:**

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3a^2 - 3 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$$

• Si  $a \neq 1$  y  $a \neq -1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow rg(A) = rg(B) = n^{\circ} \text{ incógnitas} = 3 \rightarrow S.C.D.$

• Si  $a = \pm 1$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$rg(A)$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow rg(A) = 2$$

$rg(B)$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow rg(B) = 2$$

$$rg(A) = rg(B) = 2 < 3 = n^{\circ} \text{ incógnitas} \rightarrow S.C.I.$$

$$b) \quad a = 1 \xrightarrow{S.C.I.} \begin{cases} x + y - z = -1 \\ x - y + z = 3 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases} \rightarrow n^{\circ} \text{ parámetros} = n^{\circ} \text{ incógnitas} - rg(A) = 3 - 2 = 1$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + y - z = -1 & (1) \\ x - y + z = 3 & (2) \end{cases} \xrightarrow{(1)+(2)} 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \xrightarrow{\text{Sustituyendo en (1)}} y - z = -2$$

$$\xrightarrow{z=\lambda} y = -2 + \lambda$$

Por tanto:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$



**Ejercicio B2.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Un almacén de frutos secos tiene un saco de 50 kg de almendras y otro de 25 kg de avellanas. Quiere mezclarlos para preparar bolsas mixtas para su venta. La cantidad de almendras de la mezcla ha de ser como mínimo 1,5 veces la cantidad de avellanas. Además, para que le sea rentable la preparación, deberá vender al menos 60 kg entre ambos tipos de frutos secos. Por otra parte, no puede vender más de 70 kg entre ambos. Represente la región factible. Calcule la cantidad de cada fruto seco que ha de contener la mezcla para obtener el máximo beneficio si un kg de almendras le deja un beneficio de 1€ y un kg de avellanas de 2€, y obtenga el beneficio que se obtiene con la venta de esta mezcla.

Solución:

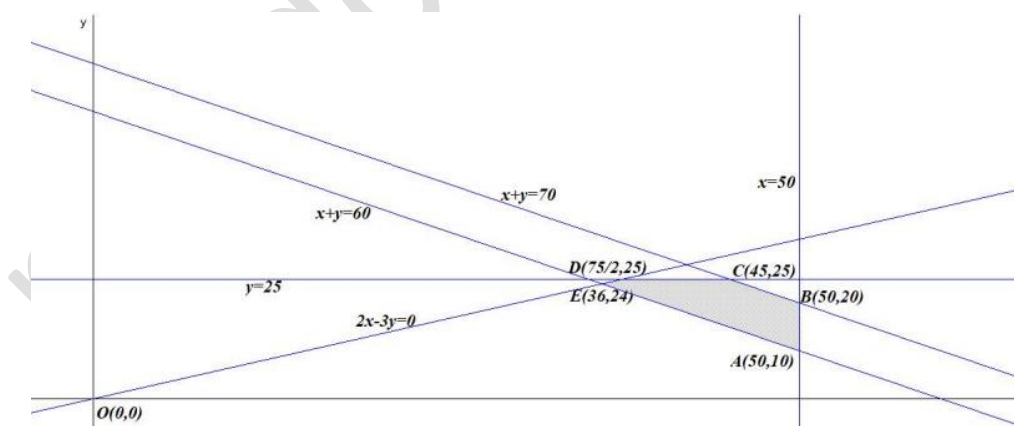
- a) Definimos las variables:  $x$ : nº kg de almendras;  $y$ : nº kg de avellanas

Definimos la función objetivo a maximizar:  $f(x, y) = x + 2y$

Las inecuaciones que se deducen del enunciado y que conforman la región factible son:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 50 \\ 0 \leq y \leq 25 \\ x \geq 1,5y \\ x + y \geq 60 \\ x + y \leq 70 \end{cases}$$

Representamos la región factible, calculamos las coordenadas de sus vértices y sustituimos cada punto en la función objetivo:



$$\begin{aligned} A(50; 10) &\rightarrow f(50; 10) = 70 \\ B(50; 20) &\rightarrow f(50; 20) = 90 \\ C(45; 25) &\rightarrow f(45; 25) = 95 \text{ (máximo)} \\ D(37,5; 25) &\rightarrow f(37,5; 25) = 87,5 \\ E(36; 24) &\rightarrow f(36; 24) = 84 \end{aligned}$$

Por tanto, el beneficio máximo es de 95€ y se da con 45 kg de almendras y 25 kg de avellanas.



**Ejercicio B3.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real, definida  $f(x) = (x^2 - 3)e^x$ .

a) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f(x)$  y determine sus extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.

b) Calcule

$$\int_1^2 e^{-x} f(x) dx$$

Solución:

a) Para calcular la monotonía y los extremos relativos, primero calculamos  $f'(x)$  y la igualamos a cero:

$$f'(x) = 2xe^x + (x^2 - 3)e^x = (x^2 + 2x - 3)e^x \Rightarrow (x^2 + 2x - 3)e^x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^x = 0 \implies \nexists x \in \mathbb{R} \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \implies \begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(1) = -2e \\ x = -3 \Rightarrow f(-3) = \frac{6}{e^3} \end{cases} \end{cases}$$

A continuación estudiamos la monotonía viendo el signo de  $f'(x)$ :

|         | $(-\infty, -3)$ | $(-3, 1)$     | $(1, \infty)$ |
|---------|-----------------|---------------|---------------|
| $f'(x)$ | +               | -             | +             |
| $f(x)$  | creciente ↗     | decreciente ↘ | creciente ↗   |

Por tanto,  $f(x)$  es creciente en  $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$  y decreciente en  $(-3, 1)$ , y tiene un máximo relativo en  $(-3, 6/e^3)$  y un mínimo relativo en  $(1, -2e)$ .

b)

$$\begin{aligned} \int_1^2 e^{-x} f(x) dx &= \int_1^2 e^{-x} (x^2 - 3)e^x dx = \int_1^2 (x^2 - 3) dx = \left[ \frac{x^3}{3} - 3x \right]_1^2 = \\ &= \left( \frac{2^3}{3} - 3 \cdot 2 \right) - \left( \frac{1^3}{3} - 3 \cdot 1 \right) = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

**Ejercicio B4.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = 0,5, P(\bar{B}/A) = 0,4, P(A \cup B) = 0,9$$

a) Calcule  $P(B/\bar{A})$

b) Determine si son dependientes o independientes los sucesos A y B. Justifique la respuesta.

Solución:



a)

$$\bullet \quad P(\bar{B}/A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow 0,4 = \frac{0,5 - P(A \cap B)}{0,5}$$

$$\rightarrow P(A \cap B) = 0,5 - 0,4 \cdot 0,5 = 0,3$$

$$\bullet \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow 0,9 = 0,5 + P(B) - 0,3 \rightarrow P(B) = 0,7$$

Por tanto:

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{0,7 - 0,3}{1 - 0,5} = \frac{0,4}{0,5} = 0,8$$

$$b) \quad A \text{ y } B \text{ son independientes} \leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = 0,3 \neq 0,35 = 0,5 \cdot 0,7 = P(A) \cdot P(B) \rightarrow A \text{ y } B \text{ no independientes}$$

**Ejercicio B5.** (Calificación máxima: 2 puntos)

El consumo diario de pan de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media  $\mu$  y desviación típica 20 gramos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 36. Calcule la probabilidad de que la media muestral  $\bar{X}$  no supere los 125 gramos si  $\mu = 120$  gramos.

b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 81 estudiantes de secundaria se ha obtenido el intervalo de confianza (117,3444; 124,6556) para  $\mu$ , determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

Solución:

$x$ : consumo diario de pan de un estudiante de secundaria (gramos)

$$a) \quad x \in N(\mu, \sigma) \xrightarrow{\text{Teorema central del límite}} \bar{X} \in N(\mu, \sigma/\sqrt{n}) \text{ donde:}$$

- $\mu = 120$
- $\sigma = 20$
- $n = 36$

Por lo que, sustituyendo:

$$P(\bar{X} \leq 125) = P\left(z \leq \frac{125 - 120}{20/\sqrt{36}}\right) = P(z \leq 1,5) = 0,9332 = 93,32\%$$

b) Calculamos el error máximo viendo cual es la semiamplitud del IC:

$$E = \frac{124,6556 - 117,3444}{2} = 3,6556$$

Por otra parte, despejando de la fórmula del error (con  $n=81$ ):

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{3,6556 \cdot \sqrt{81}}{20} = 1,65$$



Por tanto, el nivel de confianza pedido será:

$$\begin{aligned} NC &= 1 - \alpha = P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = P(-1,65 \leq z \leq 1,65) = \\ &P(z \leq 1,65) - P(z \leq -1,65) = P(z \leq 1,65) - P(z \geq 1,65) = \\ &P(z \leq 1,65) - (1 - P(z \leq 1,65)) = 2P(z \leq 1,65) - 1 = 2 \cdot 0,9505 = 0,9010 \\ &= 90,10\% \end{aligned}$$