

**UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID**

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

Curso **2024-2025**MATERIA: **MATEMÁTICAS II****INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN**

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los **cuatro** bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada bloque se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1. (2.5 puntos) En el baloncesto existen canastas que valen un punto, otras que valen dos y otras que valen tres puntos. Calcule el número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido sabiendo que:

- El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80% en tiros de uno, del 50% en tiros de dos y del 40% en tiros de tres.
- La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos.
- El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos.

Pregunta 1.2. Sean la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3. Se pide:

- a) (1.25 puntos) Calcular el polinomio $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ y hallar las raíces reales del polinomio.
- b) (1.25 puntos) Para $\lambda = 5$, calcular un vector no nulo $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que satisfaga que $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$.

Bloque 2. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 2. Un muro rectangular de la biblioteca pública del barrio se va a pintar con la ayuda de unos grafiteros. La dimensión del muro es de 3 metros de alto y 12 metros de largo. Colocando la esquina inferior izquierda del muro en el origen de coordenadas, se va a utilizar la curva $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$ para diferenciar dos regiones del muro que serán pintadas con dos colores distintos. Se sabe que con un bote de spray se pueden pintar 3 metros cuadrados de superficie.

- a) (0.75 puntos) Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x)$ en el intervalo $[0, 12]$. ¿Está la curva en este intervalo $[0, 12]$ contenida completamente en el muro?
- b) (1.25 puntos) Halle el área que tienen que pintar de cada color.
- c) (0.5 puntos) ¿Cuántos botes de spray se tienen que comprar como mínimo para pintar toda el área bajo la curva $f(x)$?

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1. Dados la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$ y el plano $\pi: x + 2y - 3z = 1$, se pide:

- a) (0.75 puntos) Hallar una ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a π .
- b) (0.75 puntos) Hallar una ecuación de la recta contenida en π que corta perpendicularmente a r .
- c) (1 punto) Calcular los puntos de la recta r cuya distancia al plano π es $\sqrt{14}$.

Pregunta 3.2. Sean el punto $P(0, 1, 1)$ y el plano $\pi: x + y = 2$. Se pide:

- a) (0.5 puntos) Hallar la distancia del punto P al plano π .
- b) (1 punto) Determinar el punto Q del plano π cuya distancia a P es igual que la distancia de P a π .
- c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por P y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

Bloque 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 4.1. Sea $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ un espacio muestral y P una medida de probabilidad en E definida por: $P(7) = P(3) = \frac{1}{4}$ y con el resto de sucesos elementales equiprobables.

Se consideran los sucesos $A = \{7, 11, 13, 19\}$, $B = \{2, 5, 7, 13, 17\}$ y $C = \{3, 5, 7, 11, 13\}$. Se pide calcular:

- a) (1.25 puntos) $P\left(\overline{(A - C)} \cap B\right)$.
- b) (1.25 puntos) $P\left((A \cap B) \mid \overline{C}\right)$.

Pregunta 4.2. Entre los ciudadanos de 14 años o más de cierto país, el 20% de la población tiene entre 14 y 24 años, el 50% entre 25 y 64 y el resto más de 64 años. Según datos recogidos por el ministerio de cultura de ese país, el 74% de sus ciudadanos de entre 14 y 24 es lector habitual, mientras que el porcentaje decrece hasta el 65.8% entre los de 25 a 64 y al 53.7% entre los mayores de 64. Elegido un ciudadano al azar del país en cuestión de 14 años o más, se pide:

- a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea lector habitual.
- b) (1.25 puntos) Si no es lector habitual, calcular la probabilidad de que tenga entre 25 y 64 años.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

Los contenidos correspondientes al bloque F se evaluarán transversalmente en cualquiera de los ejercicios. Se penalizará en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y se valorarán las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

1.1.

Planteamiento: 1.5 puntos. (Se darán 0.5 puntos por cada ecuación bien planteada). Resolución correcta del sistema planteado: 1 punto. En caso de resolución correcta de un sistema con alguna ecuación mal planteada, se valorará con hasta 0.5 puntos.

1.2.

a) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

b) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

2.

a) Cálculo correcto de valores máximos y mínimos: 0.5 puntos. Respuesta correcta de la pregunta: 0.25 puntos.

b) Cálculo del área de una región con una integral definida: 1 punto (planteamiento: 0.5 puntos, resolución: 0.5 puntos). Cálculo del área de la segunda región: 0.25 puntos.

c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

3.1.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos (0.25 puntos por cada punto).

3.2.

a) Cálculo de la distancia: 0.5 puntos.

b) Planteamiento geométrico: 0.5 puntos. Cálculo del punto Q : 0.5 puntos.

c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

4.1.

a) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

b) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

4.2.

a) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

b) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

MATEMÁTICAS II–SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

1.1.

Si x es el número de lanzamientos de un punto, y el de dos y z el de tres, hay que resolver el sistema:

$$\begin{cases} 4x + 5y + 6z = 400 \\ 3x - 5y + 3z = 0 \\ x + y - 2z = 5 \end{cases}.$$

La solución del sistema es $x = 25$, $y = 30$ y $z = 25$. Por lo tanto, el equipo realizó 25 tiros de uno, 30 de dos y 25 de tres.

1.2.

a) $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3 - \lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20 = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 10)$ es el polinomio.

Igualando a cero el polinomio anterior y resolviendo la ecuación asociada, se obtienen $\lambda = 2$ (raíz doble) y $\lambda = 5$.

b) Se resuelve el sistema $(A - 5I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ que es un sistema compatible indeterminado cuyas soluciones son de la forma $(x, y, z) = (t, t, \frac{5}{3}t)$ con $t \in \mathbb{R}$. Un posible vector no nulo es $(x, y, z) = (3, 3, 5)$.

2.

a) La función $\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right)$ está acotada entre -1 y 1 . Al estar desplazada verticalmente dos unidades, el valor mínimo es 1 y el valor máximo es 3 . Ambos valores están dentro del muro de altura 3 metros.

b) La función es positiva en todo su dominio. El área bajo la curva contenida en el muro es:

$$A_{\text{inf}} = \int_0^{12} f(x) dx = \int_0^{12} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 \right) dx = \left[\frac{9}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2x \right]_0^{12} = \frac{9}{\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 24 \approx 21.52 \text{ m}^2.$$

Como el área del muro es base por altura, el área total para pintar es 36 m^2 . El área para pintar por encima de la curva es $36 - A_{\text{inf}} = 12 - \frac{9}{\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \approx 14.48 \text{ m}^2$.

c) Serán necesarios $A_{\text{inf}}/3 \approx 7.17$ botes para pintar el área inferior. Por lo tanto, se tienen que comprar 8 botes para pintar toda el área inferior.

3.1.

a) El plano pasa por el punto $P(1, 0, 2)$ y tiene como vectores directores $\vec{u} = (2, 0, 1)$ (director de la recta) y $\vec{v} = (1, 2, -3)$, por lo que una ecuación paramétrica del plano pedido es $(x, y, z) = (1, 0, 2) + \alpha(2, 0, 1) + \beta(1, 2, -3)$. Una ecuación cartesiana del plano es $2x - 7y - 4z + 6 = 0$.

b) Ambas rectas se cortan en el punto de intersección entre π y r . Resolvemos $(1 + 2\lambda) + 2(0) - 3(2 + \lambda) = 1$, $\lambda = -6$, la recta buscada pasa por el punto $(-11, 0, -4)$ y como vector director tendrá el perpendicular al normal al plano π y perpendicular al director de la recta r , es decir, $(2, 0, 1) \times (1, 2, -3) = (-2, 7, 4)$. Así una ecuación de la recta pedida es $\frac{x+11}{-2} = \frac{y}{7} = \frac{z+4}{4}$.

c) Teniendo en cuenta la distancia de un punto genérico P de la recta r al plano π , tenemos que

$$\text{dist}(P, \pi) = \frac{|1 \cdot (1 + 2\lambda) + 2 \cdot 0 - 3 \cdot (2 + \lambda) - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \sqrt{14}.$$

De esta ecuación tenemos $|- \lambda - 6| = 14$, cuyas soluciones son $\lambda = -20$ y $\lambda = 8$. Sustituyendo estos valores de λ en la ecuación de la recta, obtenemos que los puntos buscados son: $(-39, 0, -18)$ y $(17, 0, 10)$, respectivamente.

3.2.

a) $d(P, \pi) = \frac{|0 + 1 - 2|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

b) Vector normal del plano π es $\vec{u} = (1, 1, 0)$. La recta r que pasa por P y es perpendicular a π tiene ecuación: $(x, y, z) = (\lambda, 1 + \lambda, 1)$.

La intersección de r con π da $\lambda + 1 + \lambda - 2 = 0$, $\lambda = 1/2$. El punto Q es $(1/2, 3/2, 1)$.

c) El plano π solo tiene dos puntos de corte con los ejes coordenados $A(2, 0, 0)$ y $B(0, 2, 0)$. El área del triángulo formado por P , A y B es:

$$\frac{1}{2} \|\vec{PA} \times \vec{PB}\| = \sqrt{3}.$$

4.1.

Sea $x = P(2) = P(5) = P(11) = P(13) = P(17) = P(19)$. Como $P(E) = 1 \Rightarrow 1 - \frac{2}{4} = 6 \cdot x \Rightarrow x = \frac{1}{12}$.

a) $A - C = \{19\} \Rightarrow \overline{(A - C)} \cap B = B$ y por lo tanto $P(\overline{(A - C)} \cap B) = P(B) = \frac{1}{4} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}.$

b) $A \cap B = \{7, 13\}$ y $\overline{C} = \{2, 17, 19\}$ de forma que $P((A \cap B) | \overline{C}) = \frac{P((A \cap B) \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{P(\emptyset)}{\frac{3}{12}} = 0.$

4.2.

Consideremos los sucesos A = “tener entre 14 y 24 años”, B = “tener entre 25 y 64 años”, C = “tener más de 64 años” y D = “ser lector habitual”.

a) Teniendo los porcentajes sobre la población de más de 14 años, se puede utilizar el teorema de la probabilidad total. La probabilidad pedida es

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) = P(D | A)P(A) + P(D | B)P(B) + P(D | C)P(C) \\ &= 0.74 \cdot 0.2 + 0.658 \cdot 0.5 + 0.537 \cdot 0.3 = 0.6381. \end{aligned}$$

b) $P(B | \overline{D}) = \frac{P(\overline{D} | B) \cdot P(B)}{1 - P(D)} = \frac{0.342 \cdot 0.5}{1 - 0.6381} \approx 0.4725.$
