mundoestudiante
métodoBarbeito

MATEMÁTICAS CCSS
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA - 2025

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)
La empresa tecnológica Pear acaba de lanzar la nueva versión para 2025 de su smartphone insignia, el P25. En la red social Rettiwt se ha generado una alta expectación y los primeros compradores del P25 han comenzado a publicar fotos con sus dispositivos y sus opiniones. La mayoría de estas opiniones son positivas, pero hay una minoría de usuarios que reporta un calentamiento excesivo del P25 que genera en pantalla el mensaje de aviso "El P25 necesita enfriarse para poder usarlo". Con el objetivo de recabar más información para su próximo vídeo, el youtuber @solo_reviews ha abierto un hilo para solicitar a los compradores verificados del P25 que reporten si han experimentado o no sobrecalentamiento repentino en sus smartphones, entendiendo este como el que origina el aviso en condiciones normales de uso. Un total de 288 compradores verificados responden en el hilo, de los cuales 20 reportan haber visto el mensaje de enfriamiento necesario en condiciones de uso normales. Dado el perfil de los seguidores de @solo_reviews, se asume que esta es una muestra aleatoria simple. Ante el ruido generado en las redes sociales, la empresa Pear lanza el siguiente comunicado en Rettiwt: En Pear aclaramos: no hay problemas generalizados en nuestro nuevo P25. El sobrecalentamiento afecta al 2 % de dispositivos al estar exclusivamente limitado a un lote defectuoso de un proveedor. Estamos contactando a los clientes afectados para ofrecer una solución inmediata. #PearSupport #P25

a) (1,25 puntos) Asumiendo que el comunicado de Pear es cierto, calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que el número de smartphones defectuosos reportados en el hilo de @solo_reviews hubiese sido superior o igual a 11.

b) (1,25 puntos) Obtenga un intervalo del 99 % de confianza para la proporción de smartphones defectuosos a partir del hilo de @solo_reviews. ¿Es cuestionable la veracidad del comunicado de Pear?

Solución:

a) n = 288 p = 0,02 q = 0,98

$$B(n,p) \cong N\left(n\cdot p, \sqrt{n\cdot p\cdot q}\right) \rightarrow B(288{,}0'02) \approx N(5'76\,,2{,}37)$$

$$P(X \geq 11) = P(X' \geq 10{,}5) = P\left(Z \geq \frac{10{,}5-5{,}76}{2{,}37}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2)$$
$$= 1 - 0{,}9772 = \boxed{0{,}0228}$$

b) $p = \frac{20}{288} = 0{,}07 \quad q = 0{,}93 \quad 99\% \rightarrow z_{\frac{\propto}{2}} = 2{,}575 \quad I.C = (\hat{p} - E\,,\ \hat{p} + E)$

$$E = z_{\frac{\propto}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}} \rightarrow E = 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}07\cdot 0{,}93}{288}} = 0{,}038$$

$$\boxed{I.C = (0'032\,, 0'1087)}$$

Es cuestionable. Nos dicen que afecta al 2% de dispositivos y con la confianza al 99%, el porcentaje de smartphones con sobrecalentamiento estaría entre el 3,2% y el 10,87%.

Ejercicio 2.1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \\ (a+1)x + az = 5 \end{cases}$$

a) (1,25 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.
b) (1,25 puntos) Resuelva el sistema para a = 2.

Solución:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ a+1 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ a+1 & 0 & a & 5 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -a + a + 1 + a + 1 - 2a = -a + 2 = 0 \rightarrow \boxed{a = 2}$$

Para a = 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|A_{2x2}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow Rg\ A = 2 \qquad |B_{3x3}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow Rg\ B = 2$$

- $Si\ a = 2 \rightarrow Rg\ A = Rg\ B \neq n^{o}\ incógnitas \rightarrow SCI$
- $Si\ a \neq 2 \rightarrow Rg\ A = Rg\ B = n^{o} incógnitas \rightarrow SCD$

b) Para a = 2, tenemos un sistema compatible indeterminado con un parámetro (nºparámetros = nºincógnitas – Rango = 3-2 = 1)

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases} \rightarrow \boxed{Si\ y = \alpha, entonces\colon\ x = 2\alpha + 1\ ;\ z = 1 - 3\alpha}$$

Ejercicio 2.2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

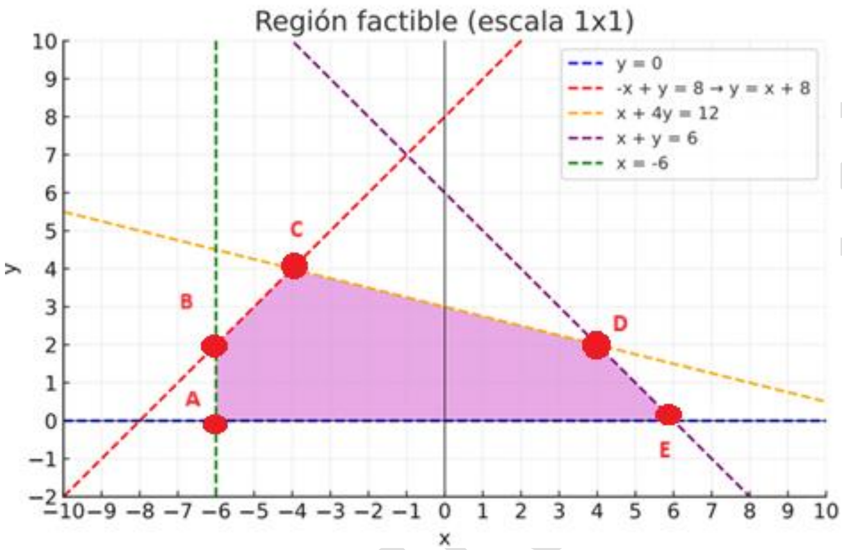
Sean x e y dos números reales tales que:

$$x \geq -6, \quad y \geq 0, \quad -x + y \leq 8, \quad x + 4y \leq 12, \quad x + y \leq 6$$

a) (2 puntos) Represente gráficamente la región S determinada por las restricciones y calcule las coordenadas de sus vértices.
b) (0,5 puntos) Se desea maximizar el doble de y menos el triple de x en S. Indique el valor máximo y el punto de la región en el cual se alcanza.

Solución:

a)



Vértices: A(-6,0) B(-6,2) C(-4,4) D(4,2) E(6,0).

b) La función objetivo en este caso es: f(x,y) = -3x + 2y. Calculamos el máximo y mínimo:

$$A(-6{,}0) \rightarrow f(-6{,}0) = 18$$
$$\boxed{B(-6{,}2) \rightarrow f(-6{,}2) = 22 \quad \textit{Máximo}}$$
$$C(-4{,}4) \rightarrow f(-4{,}4) = 20$$
$$D(4{,}2) \rightarrow f(4{,}2) = -8$$
$$\boxed{E(6{,}0) \rightarrow f(6{,}0) = -18 \quad \textit{Mínimo}}$$

Ejercicio 3.1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)
Considere la función real de variable real:

$$f(x) = x(x^2 + a),$$

donde a > 0 es un parámetro real.

a) (1 punto) Calcule el valor de a para que la primitiva de f(x), F(x), cumpla que F(0) = 0 y F(1) = 1.
b) (0,5 puntos) Para $a = \frac{3}{2}$, obtenga el área del recinto delimitado por f(x), el eje horizontal y las rectas verticales x = 0 y x = 2.
c) (1 punto) Halle los valores de a que hacen que la pendiente de la recta tangente a f(x) en el punto x = 1 sea 1.

Solución:

a)

$$\int x(x^2+a)\ dx = \int x^3 + ax\ dx = \frac{x^4}{4} + \frac{ax^2}{2} + C$$

$$F(0) = 0 + 0 + C = 0 \rightarrow \quad C = 0$$

$$F(1) = \frac{1}{4} + \frac{a}{2} = 1 \rightarrow 1 + 2a = 4 \rightarrow \boxed{a = \frac{3}{2}}$$

b) La función solo corta al eje horizontal en x=0, por lo tanto, integramos directamente entre los valores x=0 y x=2:

$$\int_0^2 x\left(x^2+\frac{3}{2}\right)dx = \int x^3 + \frac{3}{2}x\ dx = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{4}\Bigg]_0^2 = (4+3) - (0) = \boxed{7u^2}$$

c) La ecuación de la recta tangente es la siguiente:

$$y - y_o = f'(x_o)\cdot(x - x_o) \quad donde \quad f'(x_o) = m$$

$$f'(x) = (x^2+a) + 2x^2 = 3x^2 + a$$

$$f'(1) = 1 \rightarrow 3\cdot 1^2 + a = 1 \rightarrow a = -2$$

Pero en el enunciado nos dicen que a>0, por lo tanto, no sería un valor válido.

Ejercicio 3.2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2x-1} & si \quad x < 0 \\ \dfrac{4x^3+x^2}{x^2-9} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) (0,5 puntos) Determine el dominio de f(x).
b) (0,5 puntos) Estudie la continuidad de f(x) en x = 0.
c) (1,5 puntos) Calcule las asíntotas de f(x).

Solución:

a) Al ser una función a trozos, tenemos que evaluar el dominio de cada función teniendo en cuenta entre que valores está definido. En este caso tendremos:

$$\boxed{Dom(f) = \mathbb{R} - \{3\}.}$$

b)

$\underline{x=0}$

$f(0)=0 \qquad \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{2x-1}=0 \qquad \lim\limits_{x\to +} \frac{4x^3+x^2}{x^2-9}=0$

La función es continua.

c)

Asíntotas verticales en $x=3$:

$$\lim_{x\to 3}\frac{4x^3+x^2}{x^2-9}=\frac{117}{0}\to \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{4x^3+x^2}{x^2-9}=\dfrac{+}{-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{4x^3+x^2}{x^2-9}=\dfrac{+}{+}=+\infty \end{cases}$$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{2x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\to (Grado\ numerador=Grado\ denominador)\to \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{4x^3+x^2}{x^2-9}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\to (Grado\ numerador>Grado\ denominador\to\ +\infty$$

La función tiene una asíntota horizontal en $y=\frac{1}{2}$ cuando x tiene a menos infinito.

Asíntotas oblicuas: y=mx+n

$$m\colon \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^3+x^2}{x^2-9}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+x^2}{x^3-9x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=4$$

$$n\colon \lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+x^2}{x^2-9}-4x=\frac{4x^3+x^2-4x^3+36x}{x^2-9}=\frac{x^2+36x}{x^2-9}=\frac{\infty}{\infty}=1$$

La función tiene una asíntota oblicua, y=4x+1, cuando x tiene a más infinito.

<u>Ejercicio 4.1.</u> (Calificación máxima: 2,5 puntos)
Sean A, B y C tres sucesos. Se sabe que A y B son independientes. Además, se conoce la siguiente información:

$$P(A)=0{,}4, \qquad P(\bar{B})=0{,}7$$
$$P(C)=0{,}5, \qquad P(A\cap B|C)=0{,}2,$$

donde $\bar{B}$ denota el suceso complementario de B.

a) (0,75 puntos) Calcule la probabilidad de que no ocurra A o no ocurra B.
b) (0,75 puntos) Determine la probabilidad de que A y $\bar{B}$ ocurran simultáneamente.
c) (1 punto) Obtenga $P(C|A\cap B)$.

Solución:

a) Como son independientes A y B:

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3 \qquad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}12 = \boxed{0{,}88}$$

b)

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}12 = \boxed{0{,}28}$$

c)

$$P(A \cap B|C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} \rightarrow 0{,}2 = \frac{P(A \cap B \cap C)}{0{,}5} \rightarrow P(A \cap B \cap C) = 0{,}1$$

$$P(C|A \cap B) = \frac{P(C \cap A \cap B)}{P(A \cap B)} = \frac{0{,}1}{0{,}12} = \boxed{0{,}8\hat{3}}$$

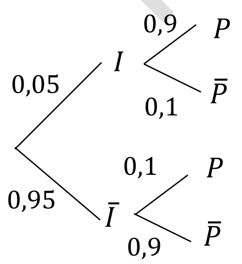
<u>Ejercicio 4.2.</u> (Calificación máxima: 2,5 puntos)
En una clínica veterinaria se utiliza una prueba médica para detectar la insuficiencia renal en gatos adultos. Se sabe lo siguiente:

- El porcentaje de gatos adultos con insuficiencia renal es del 5 %.
- Si el gato adulto tiene insuficiencia renal, la prueba da positivo el 90 % de las veces.
- Si el gato adulto no tiene insuficiencia renal, la prueba da positivo el 10 % de las veces.

a) (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que un gato adulto seleccionado al azar dé un resultado negativo en la prueba.
b) (1,25 puntos) La prueba en un gato adulto ha resultado positiva. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga insuficiencia renal?

Solución:

$Teniendo\ los\ sucesos\ I\!: Insuficiencia\ renal\ \ y\ \ P\!: Prueba\ positiva,$ entonces:



a)

$$P(\bar{P}) = P(I) \cdot P(\bar{P}|I) + P(\bar{I}) \cdot P(\bar{P}|\bar{I}) =$$
$$= 0{,}05 \cdot 0{,}1 + 0{,}95 \cdot 0{,}9 = \boxed{0{,}86}$$

b)

$$P(I|P) = \frac{P(I) \cdot P(P|I)}{P(P)} = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}9}{1 - 0{,}86} = \boxed{0{,}32}$$