



MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES JUNIO 2025

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos). Responder a los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

El dueño de una frutería quiere alquilar una cámara frigorífica para la campaña de sandías del verano. Entre las diferentes cámaras que puede alquilar cercanas a su frutería, la que más le convence es una que tiene capacidad para guardar 2700 kilos de sandía que es, según sus datos de años anteriores, la cantidad de kilos que vende cualquier semana de la campaña. Las sandías que vende son de tres variedades: sandía verde rayada, sandía negra sin pepitas y sandía negra con pepitas. La sandía rayada es la menos apreciada por su clientela, por ello decide ponerle el precio más bajo y la venderá a 1,25 euros el kilo. Las sandías negras son las más demandadas entre su clientela, pero entre estas dos variedades es más fácil vender la variedad sin pepitas. Por esta razón, determina que el precio de la sandía negra sin pepitas sea de 2,75 euros el kilo y el precio con pepitas de 2,25 euros el kilo. El dueño de la frutería quiere que, en cualquier circunstancia, el número de kilos de sandía negra con pepitas vendidos sea un tercio del total de kilos de sandías sin pepitas y sandías rayadas.

1.a) (1,25 puntos) El frutero considera que para poder pagar el alquiler y obtener beneficio, debe recaudar de la venta 5400 euros cualquier semana de la campaña. Si se venden todas las sandías almacenadas para la semana, ¿cuántos kilos debería vender de cada variedad para recaudar exactamente ese importe?

1.b) (1,25 puntos) Con la idea de simplificar el etiquetado, el frutero necesita saber si es posible poner el mismo precio a todas las variedades de sandías y seguir recaudando 5400 euros a la semana vendiendo los 2700 kilos. Si fuera posible, ¿cuál sería el precio de venta del kilo de sandía?, ¿cuál sería la cantidad de kilos de cada variedad que debería vender?. Justifique si dichas cantidades serían únicas.

Solución:

1.a)

Definimos las incógnitas:

x = kg de sandía rayada

y = kg de sandía negra sin pepitas

z = kg de sandía negra con pepitas

En primer lugar, pasamos a definir las restricciones con los datos del problema:

Total de kg vendidos: $x+y+z = 2700$

Total de recaudación: $1.25x+2.75y+2.25z = 5400$

Restricción: $z = \frac{1}{3}(x+y)$



Por tanto, y multiplicando la primera ecuación por 4, y la tercera por 3 para quitar decimales y denominadores:

$$\begin{cases} 1.25x + 2.75y + 2.25z = 5400 \\ x + y + z = 2700 \\ z = \frac{1}{3}(x + y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x + 11y + 9z = 21600 \\ x + y + z = 2700 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

Restamos la ecuación 2 de la ecuación 3 y nos queda:

$$\begin{cases} 5x + 11y + 9z = 21600 \\ x + y + z = 2700 \\ 4z = 2700 \end{cases}$$

De la tercera ecuación hallamos el valor de z , sustituimos en la primera y la segunda ecuación. Multiplicamos por 5 la segunda ecuación, restamos con la primera y nos queda el siguiente sistema escalonado:

$$\begin{cases} 5x + 11y = 15525 \\ 6y = 5400 \\ z = 675 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 55x + 11y = 15525 \\ y = 900 \\ z = 675 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1125 \\ y = 900 \\ z = 675 \end{cases}$$

Solución: 1125 kg de sandía rayada, 900 kg de sandía negra sin pepitas y 675 kg de sandía negra con pepitas.

Análogamente, en vez de hacer el método de Gauss, podemos hacer este ejercicio mediante Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 11 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 24$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 21600 & 11 & 9 \\ 2700 & 1 & 1 \\ 10 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 27000$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 21600 & 9 \\ 1 & 2700 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 21600$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 5 & 11 & 21600 \\ 1 & 1 & 2700 \\ 1 & 1 & -30 \end{vmatrix} = 16200$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{27000}{24} = 1125$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{21600}{24} = 900$$



$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{16200}{24} = 675$$

1.b)

Llamamos "p" al valor de precio único, entonces:

$$2700p = 5400 \rightarrow p = \frac{5400}{2700} = 2$$

El precio único sería 2€/kg

Rehacemos las anteriores ecuaciones con el nuevo valor de precio por kilo:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 5400 \\ x + y + z = 2700 \\ z = \frac{1}{3}(x + y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2700 \\ x + y + z = 2700 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

Vemos que tenemos un Sistema Compatible Indeterminado, por lo que tendré infinitas ecuaciones, que dependerán de un parámetro λ . Parametrizamos la incógnita y:

$$\begin{cases} x + \lambda + z = 2700 \\ x + \lambda - 3z = 0 \\ y = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + \lambda + z = 2700 \\ x + \lambda - 3z = 0 \\ y = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + z = 2700 - \lambda \\ x - 3z = -\lambda \\ y = \lambda \end{cases}$$

Restando la primera y la segunda ecuación, ya podemos hallar la solución al sistema, en función del parámetro λ :

$$\begin{cases} x + z = 2700 - \lambda \\ 4z = 2700 \\ y = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + z = 2700 - \lambda \\ z = 675 \\ y = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2025 - \lambda \\ z = 675 \\ y = \lambda \end{cases} ; \text{siendo } \lambda \in \mathbb{R}$$

Las cantidades no serían únicas, porque cualquier combinación que cumpla estos requisitos, cumpliría las condiciones del principio y será, por tanto, válidas.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2.5 puntos). Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien **2.1** o **2.2**.

Pregunta 2.1

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x - 1}, & x \leq 0 \\ \frac{x + a}{x + 1}, & x > 0 \end{cases}$$



Pregunta 2.1.a) (1 punto) Determine el valor del parámetro real a para que la función sea continua en $x = 0$.

Pregunta 2.1 b) (1,5 puntos) Calcule las asíntotas de $f(x)$

Solución:

2.1.a)

Para que la función sea continua se ha de cumplir:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+a}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+1}{x-1} \rightarrow \frac{0+a}{0+1} = \frac{0^2+1}{0-1} \rightarrow a = -1$$

Para que la función sea continua en $x=0$, a debe tomar el valor de -1 .

2.1.b)

Vamos a estudiar las asíntotas, primero a la derecha de 0 , y luego a la izquierda de 0 :

- **Asíntota vertical:** El dominio de la función $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ será: $D = \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$. Como 1 no pertenece a este tramo, **no tiene asíntota vertical en el tramo $x \leq 0$**

Asíntota horizontal: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x-1} = \infty \rightarrow$ **No tiene asíntota horizontal en el tramo $x \leq 0$**

- **Asíntota oblicua.**- Si tiene asíntota oblicua, esta será del tipo $y = mx+n$:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+1}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2-x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2+1}{x-1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$$

Hay asíntota oblicua a la izquierda de 0 , de la forma: $y=x+1$

Estudiamos ahora las asíntotas a la izquierda de 0 :

- **Asíntota vertical:** El dominio de la función $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ será: $D = \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$. Como el punto -1 no pertenece a este tramo, **no tiene asíntota vertical en el tramo $x > 0$**



- **Asíntota horizontal:** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+1} = 1 \rightarrow$ Hay asíntota horizontal en $y=1$ en el tramo $x > 0$
- **Asíntota oblicua.-** Al tener asíntota horizontal, **en este tramo no presenta asíntota oblicua.**

Pregunta 2.2

Se considera la función real de variable real dada por la siguiente expresión: $f(x) = e^x(-x^2 + 3)$

Pregunta 2.2.a) (1,25 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y clasifica, si procede, sus extremos relativos

Pregunta 2.2 b) (1,25 puntos) Halle el valor de la integral definida $\int_1^2 \frac{f(x)}{xe^x} dx$

Solución:

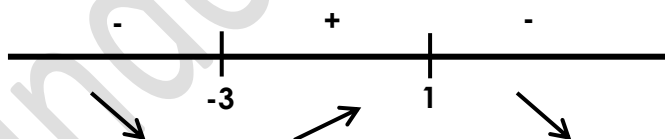
2.2.a)

Para estudiar la monotonía de la función $f(x) = e^x(-x^2 + 3)$, derivamos la función e igualamos a cero:

$$f'(x) = e^x(-x^2 + 3) + e^x(-2x) = e^x(-x^2 - 2x + 3)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow e^x(-x^2 - 2x + 3) = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -3$$

Vamos a estudiar el signo de la derivada en los intervalos:



Por lo tanto, la función es **decreciente en los intervalos $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$, y creciente en el intervalo $(-3, 1)$.**

Así mismo, vemos que hay un mínimo en el punto $(-3, f(-3))$ y un máximo en el punto $(1, f(1))$, es decir, un **mínimo en $(-3, \frac{-3}{e^3})$ y un máximo en $(1, 2e)$**

También podemos mirarlo con la segunda derivada:

$$f''(x) = e^x(-x^2 - 2x + 3) + e^x(-2x - 2) = e^x(-x^2 - 4x + 1)$$

$$f''(-3) = \frac{3}{e^3} > 0 \rightarrow \text{en } (-3, f(-3)) \text{ hay un mínimo}$$

$$f''(1) = -4e^1 < 0 \rightarrow \text{en } (1, f(1)) \text{ hay un máximo}$$



2.2.b)

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{f(x)}{xe^x} dx &= \int_1^2 \frac{e^x(-x^2+3)}{x \cdot e^x} dx = \int_1^2 \frac{-x^2+3}{x} dx \\ &= \int_1^2 \left[-x + \frac{3}{x}\right] dx = \int_1^2 -x dx + \int_1^2 \frac{3}{x} dx\end{aligned}$$

Resolviendo las dos integrales inmediatas, y aplicando la regla de Barrow, tenemos:

$$\begin{aligned}\int_1^2 -x dx + \int_1^2 \frac{3}{x} dx &= \left[-\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 3\ln x \Big|_1^2 = \left[\left(-\frac{2^2}{2}\right) - \left(-\frac{1^2}{2}\right)\right] + [3\ln 2 - 3\ln 1] = \left[\frac{-4}{2} + \frac{1}{2}\right] + \\ &\left[\ln \frac{2^3}{1^3}\right] = -\frac{3}{2} + \ln 8\end{aligned}$$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos). Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien **3.1** o **3.2**.

Pregunta 3.1

Un maestro jabonero sabe que el 90% de sus pastillas de jabón hechas a mano pasarían sin problema este control de calidad.

Pregunta 3.1.a) (1 punto) La empresa organizadora del concurso elegirá en el taller de cada participante una muestra aleatoria simple de pastillas de jabón para obtener una estimación de la proporción de ellas que superan el control de calidad. Suponiendo cierta la creencia del maestro jabonero sobre la calidad de sus pastillas, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de pastillas de jabón que la empresa organizadora debe tomar en el taller de este artesano para garantizar, con un nivel de confianza del 95%, que el margen de error en la estimación sea inferior al 5%.

Pregunta 3.1 b) (1,5 puntos) Si finalmente la organización decide seleccionar una muestra aleatoria simple de 140 pastillas de jabón de este artesano, calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos 120 pastillas de jabón superen el control de calidad.

Solución:

3.1. a)

Se pide calcular el tamaño mínimo de muestra.

$p = 0,9$

Confianza: 95%

E: 5%

Se calcula $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza del 95%

$$1-\alpha=0,95 \rightarrow \alpha=0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2}=0,025 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0,975$$



Buscando el valor en la tabla se obtiene $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

Para obtener el tamaño de muestra se emplea la fórmula del error

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \rightarrow n = \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{E} \right)^2 p \cdot q$$

Para obtener el valor de q, $q = 1 - p \rightarrow q = 0,1$

Sustituyendo los datos se obtiene: $n = \left(\frac{1,96}{0,05} \right)^2 0,9 \cdot 0,1 \rightarrow n = 138,29$

Por lo que **el tamaño mínimo de muestra deberá ser de 139 jabones.**

3.2. b)

Se quiere saber realizando la aproximación de la Binomial a la Normal, si al menos 120 pastillas de una muestra de 140 superarán el control de calidad.

$$B(n, p) \sim N(p \cdot n, \sqrt{npq})$$

$$n = 140$$

$$p = 0,9$$

$$q = 0,1$$

$$p \cdot n = 0,9 \cdot 140 = 126$$

$$\sqrt{npq} = \sqrt{140 \cdot 0,9 \cdot 0,1} = 3,55$$

$$N(126; 3,55)$$

Se pasa ahora a calcular la $P(X \geq 120)$, haciendo uso de la corrección de Yates:

$$P(X \geq 120) \rightarrow P(X \geq 119,5)$$

$$P(X \geq 119,5) = P\left(Z \geq \frac{119,5 - 126}{3,55}\right)$$

$$P(Z \geq -1,83) = P(Z \leq 1,83) = \mathbf{0,9664}$$

Pregunta 3.2

El peso de las pastillas de jabón de este artesano se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media gramos y desviación típica 30 gramos.

Pregunta 3.2.a) (1,25 puntos) La empresa organizadora del concurso seleccionó 140 pastillas de jabón de este artesano y obtuvo que el peso total fue de 17500 gramos. Obtenga un intervalo de confianza del 99% para estimar el peso medio de las pastillas de jabón de este artesano.

Pregunta 3.2 b) (1,25 puntos) Si el verdadero valor de fuera igual a 100 gramos, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de 64 pastillas de jabón de una muestra aleatoria simple fuera superior a 110 gramos?

Solución:

3.2.a)

X: peso de las pastillas de jabón

$$X \sim N(\mu, \sigma = 30)$$

$$n = 140$$

$$\text{Se calcula } \bar{x}; \bar{x} = \frac{17500}{140} = 125$$



Se calcula $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza del 99%

$$1-\alpha=0,99 \rightarrow \alpha=0.01 \rightarrow \frac{\alpha}{2}=0,005 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0,995$$

Se busca el valor en la tabla $Z_{\frac{\alpha}{2}}=2,575$

Se calcula el error del intervalo de confianza

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma}{n}} = 2,575 \cdot \frac{30}{\sqrt{140}} = 6,529$$

Intervalo de confianza

$$(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (125-6,529, 125+6,529) = (118,471, 131,529)$$

3.2.b)

$$\mu=100$$

$$n=64$$

$$\sigma=30$$

$$X \sim N(100, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \rightarrow N(100, 3,75)$$

$$P(\bar{X} > 110) = P(Z > \frac{110-100}{3,75}) = P(Z > 2,67) = 1 - P(Z \leq 2,67) = 1 - 0,9962 = 0,0038 = 0,38\%$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos). Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien **4.1** o **4.2**.

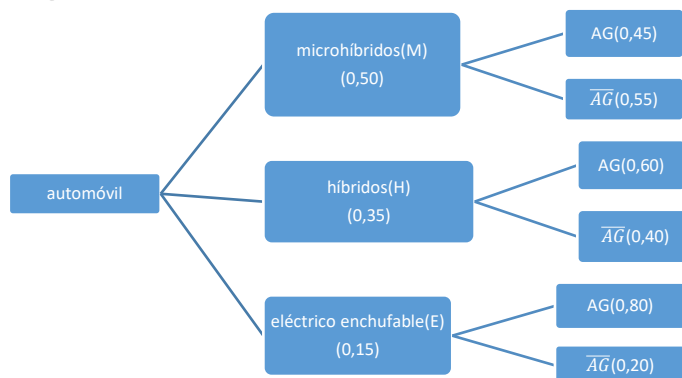
Pregunta 4.1

En un concesionario el 50% de sus ventas son de automóviles microhíbridos, el 35% híbridos y el resto eléctricos enchufables. El acabado más alto de gama se vende en el 80% de los eléctricos enchufables, el 60% de los híbridos y el 45% de los microhíbridos. Se selecciona una operación de venta al azar.

Pregunta 4.1.a) (1.25 puntos) Calcule la probabilidad de que el coche vendido en esa operación no tenga el acabado más alto de la gama.

Pregunta 4.1 b) (1,25 puntos) Si el coche correspondiente a la operación de venta seleccionada tiene el acabado más alto de la gama, determine la probabilidad de que sea eléctrico enchufable.

Solución:



4.1.a)



Para calcular la probabilidad que se pide, hay que emplear el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(\overline{AG}) = P(M) \cdot P\left(\frac{\overline{AG}}{M}\right) + P(H) \cdot P\left(\frac{\overline{AG}}{H}\right) + P(E) \cdot P\left(\frac{\overline{AG}}{E}\right) \\ = 0,50 \cdot 0,55 + 0,35 \cdot 0,40 + 0,15 \cdot 0,20 = 0,445 = \mathbf{44,5\%}$$

4.1.b)

Para calcular la probabilidad que se pide en este caso que el coche correspondiente a la operación de venta seleccionada tenga el acabado más alto de la gama, y sea eléctrico enchufable hay que hacer uso del Teorema de Bayes:

$$P(E/AG) = \frac{P(AG/E)P(E)}{P(AG)} = \frac{0,15 \cdot 0,80}{0,50 \cdot 0,45 + 0,35 \cdot 0,60 + 0,15 \cdot 0,80} = 0,2162 = \mathbf{21,62\%}$$

Pregunta 4.2

De tres sucesos A, B y C se sabe que A y C son sucesos disjuntos, A y B son independientes y se tienen las siguientes probabilidades:

$$P(A) = 0,25, P(B) = 0,2 \text{ y } P(B \cap C) = 0,05$$

Pregunta 4.2.a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que ocurra al menos uno de los sucesos A o B.

Pregunta 4.2 b) (1 punto) Calcule $P(\overline{B} \cap \overline{C})$.

Pregunta 4.2 c) (0.5 puntos) ¿Pueden ser independientes los sucesos A y C

?

Solución:

$$P(A) = 0,25$$

$$P(B) = 0,2$$

$$P(B \cap C) = 0,05$$

$$A \text{ y } C \text{ disjuntos } P(A \cap C) = 0$$

$$A \text{ y } B \text{ independientes } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

4.2.a)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,25 + 0,2 - 0,05 = \mathbf{0,4}$$

4.2.b)

Para resolver este apartado se hace uso de las Leyes de Morgan

$$P(\overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{B \cap C}) = 1 - P(B \cap C) = 1 - 0,05 = \mathbf{0,95}$$

4.2.c)

Para que sean independientes

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$

Como son disjuntos $P(A \cap C) = 0$ por lo que, para que fuesen independientes también $P(A) \cdot P(B) = 0$, esto no sucede puesto que $P(A) \cdot P(B) = 0,25 \cdot 0,2 = 0,05$.



mundoestudiante
método Barbeito

Por tanto A y C no son independientes.

mundoestudiante