PAU MATEMÁTICAS II
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA JULIO 2025

BLOQUE 1

(Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

<u>Pregunta 1.1</u> Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k:

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ Se pide:

a) (1.5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de k.
b) (1 punto) Resolver el sistema para k = 0.

Solución:

a) Discutimos el sistema por **Rouché-Frobenius***:*

$$\begin{cases} kx + y + z = 0 \\ (k+1)x + y - kz = k \\ x + (k+1)y = 2k \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 0 \\ k+1 & 1 & -k & k \\ 1 & k+1 & 0 & 2k \end{pmatrix}$$

$$|A| = k^3 + 2k^2 + k \quad \rightarrow \quad k^3 + 2k^2 + k = 0 \quad \rightarrow \quad k = 0 \ ; \ k = -1$$

Si $k \neq 0$ o $k \neq -1$ → R(A)=3 → R(A) = R(B) = nº incógnitas → sistema compatible determinado

$Si \ \ k = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Se trata de un sistema lineal homogéneo, y al ser |A|=0 → sistema compatible indeterminado

$$Si \ \ k = -1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$$

→ R(A) = 2 → R(B) = 3 → R(A) ≠ R(B) → sistema incompatible

b) Para k = 0 es un sistema lineal homogéneo

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \mathrm{R(A)} = 2 \rightarrow \text{nºparam} = \text{nº incog} - \mathrm{R(A)} \rightarrow nºparam = 1-$$

$$\rightarrow x = t \rightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ y = -t \end{cases} \rightarrow y = -t \rightarrow z = t$$

Pregunta 1.2 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, se pide

a) (1.5 puntos) Hallar las matrices simétricas B que verifiquen BA = (A + A^2)B.

b) (1 punto) Con la matriz A_1 = A, se consideran las matrices $A_2 = A_1^2 + A_1$, $A_3 = A_2^2 + A_2$, $A_4 = A_3^2 + A_3$ y asi sucesivamente. Hallar A_{2025}.

Solución:

$$a)\;\; B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \to \mathrm{BA} = (\mathrm{A} + \mathrm{A}^2)\mathrm{B} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^2\right]\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a-b & 5a-3b \\ b-c & 5b-3c \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3a-5b & -3b-5c \\ a+b & b+c \end{pmatrix} \to \begin{cases} b = -a \\ c = -a \end{cases} \to B = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \to A_2 = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + A_1 = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \to$$

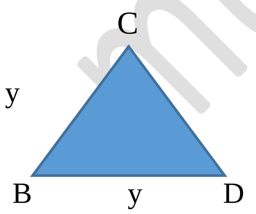
$$A_4 = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to A_{2n} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to A_{2n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \to A_{2025} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

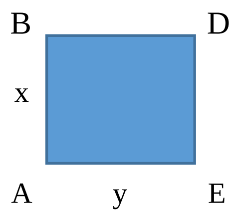
BLOQUE 2

(Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 2: Un agricultor dispone de 120 metros de valla para delimitar una parcela con forma de pentágono. Los vértices del pentágono se nombraran consecutivamente como ´ A, B, C, D y E. Se sabe que A, B, D y E forman un rectángulo, y que el punto C se encuentra en el exterior de este rectángulo, formando un triángulo equilátero con los puntos B y D.¿A qué distancia del vértice A el agricultor debe ubicar los vértices B y E si quiere que la parcela tenga la mayor área posible?´

Solución:





$$\text{Triángulo} \to base\!: b = y \to altura : a^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = y^2 \to altura = \frac{\sqrt{3}y}{2}$$

$$Perímetro\!: 120 = 3y + 2x$$

$$Área\!: xy + \frac{1}{2}ba = xy + \frac{\sqrt{3}y^2}{4} \to A(y) = 60y - \frac{3}{2}y^2 + \frac{\sqrt{3}y^2}{4} \to A`(y) = 60 - 3y + \frac{\sqrt{3}y}{2} \to$$

$$\to A`(y) = 0 \to y = 28{,}11 \to A``(y) = -3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \to A``(28{,}11) < 0 \to$$

$$\to por\ tanto\ tendremos\ un\ área\ máxima\ para\ y = 28{,}11(m) \to x = 17{,}835(m)$$

BLOQUE 3

(Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1. Sean los puntos A(1, 1, 2), B(2, −1, 0), C(−2, 0, 3) y D(2, −3, −1) y la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{-1}$$

a) (0.5 puntos) Compruebe que los puntos no son coplanarios y calcule el volumen del tetraedro determinado por ellos.
b) (1 punto) Calcule el área de la cara del tetraedro ABCD determinada por los puntos A, B y C y la longitud de la altura del tetraedro que parte del vértice D.
c) (1 punto) Calcule la distancia entre la recta r y la recta determinada por los puntos B y D.

Solución:

a)
Los puntos no son coplanarios si forman en volumen, es decir, que los tres vectores que forman los puntos son linealmente independientes (producto mixto ≠ 0)

$$\overrightarrow{AB}\,(1,-2,-2\,);\ \overrightarrow{AC}(-3,-1,1);\ \overrightarrow{AD}\,(1,-4,-3) \rightarrow \begin{vmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AD} \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AD} \end{vmatrix} = 0{,}5\ u^3$$

b)

$$A_{ABC} = \frac{|\overrightarrow{AB}\ x\ \overrightarrow{AC}\,|}{2} \rightarrow \overrightarrow{AB}\ x\ \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-4{,}5,-7) \rightarrow A_{ABC} = \frac{|(-4{,}5,-7)|}{2} =$$

$$= \frac{3\sqrt{10}}{2}u^2$$

$$\pi_{ABC} \rightarrow \vec{n} = (-4{,}5,-7)\ \ A(1,1,2) \rightarrow -4.1 + 5.1 - 7.2 + D = 0 \rightarrow D = 13 \rightarrow$$

$$\rightarrow \pi_{ABC} \equiv -4x + 5y - 7z + 13 = 0 \rightarrow d(\pi_{ABC}\,, D) = \frac{[\pi_{ABC}(D)]}{|\vec{n}|} =$$

$$= \frac{|-4(2) + 5(-3) - 7(-1) + 13\,|}{\sqrt{(-4)^2 + 8^2 + (-7)^2}} = 0{,}31\ u$$

c)

$$r_1\!: \vec{v}\ (2,1,-1)\ P(1,-1,0) \rightarrow r_2\!:\ \mathrm{B}(2,-1,0)\ \ \mathrm{D}(2,-3,-1)\ \ \overrightarrow{BD}\ (0,-2,-1) \rightarrow$$

$\rightarrow$ los vectores no son proporcionales por tanto las rectas no son paralelas, por tanto podemos

calcular la distancia como: $d(r_1, r_2) = \dfrac{\begin{vmatrix} \overrightarrow{BP} \\ \overrightarrow{BD} \\ \vec{V} \end{vmatrix}}{|\overrightarrow{BD}\ x\ \vec{v}\,|} = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \dfrac{3}{\sqrt{29}}u$

Pregunta 3.2 Dados los puntos A(0, 0, 1) y B(1, 0, 1), se pide:
a) (1 punto) Hallar una ecuación del plano paralelo al eje OZ y que pasa por los puntos A y B.
b) (1.5 puntos) Hallar una ecuación de una recta perpendicular al plano z = 1 que diste una unidad tanto del punto A como del punto B.

Solución:

a) $$\pi: \begin{cases} \parallel eje\ OZ \rightarrow \vec{v}\,(0,0,1) \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,0,0) \end{cases} \rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi \equiv y = 0$$

b)
$$r: \begin{cases} \perp z = 1 \rightarrow \vec{v_r} = \vec{n_\pi} = (0,0,1) \\ P(a,b,c) \end{cases} \rightarrow d(r,A) = d(r,B) = 1 \rightarrow \frac{\left|\vec{v_r}\ x\ \overrightarrow{PA}\right|}{\left|\vec{v_r}\right|} = \frac{\left|\vec{v_r}\ x\ \overrightarrow{PB}\right|}{\left|\vec{v_r}\right|} = 1 \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{|(b,-a,0)|}{|1|} = 1 \\ \dfrac{|(-b,1-a,0)|}{|1|} = 1 \end{cases} \rightarrow a = \frac{1}{2} \rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ z = 1 + t \end{cases}$$

BLOQUE 4

(Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 4.1. En base a un estudio de los datos antropométricos de la población laboral española en hombres se considera que la masa, en kilogramos, de un individuo de esta población es una variable normal de media 75.67 y desviación típica 11.05. Se pide:
a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa entre 60 y 80 kilogramos.
b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa superior a 100 kilogramos.
c) (1 punto) Elegidos diez hombres distintos al azar en esta población calcular la probabilidad de que no más de uno supere los 100 kilogramos.

Solución:

a)
$$\mathrm{N}(75{,}67, 11{,}05) \rightarrow \mathrm{P}(60 \le \mathrm{X} \le 80) = \mathrm{P}\left(\frac{60 - 75{,}67}{11{,}05} \le \mathrm{Z} \le \frac{80 - 75{,}67}{11{,}05}\right) =$$
$$= \Phi(0{,}392) - (1 - \Phi(1{,}418)) \approx 0{,}652 - 0{,}078 = 0{,}574$$

b)
$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > 100) = \mathrm{P}\left(\mathrm{Z} > \frac{100 - 75{,}67}{11{,}05}\right) = 1 - \Phi(2{,}201) \approx 1 - 0{,}986 = 0{,}014$$

c)
$$\mathrm{n} = 10\,;\ \mathrm{p} = 1 - 0{,}014 = 0{,}986$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \le 1) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) + \mathrm{P}(\mathrm{X} = 1) = \binom{10}{0} . 0{,}986^{10} . 0{,}014^{0} + \binom{10}{1} . 0{,}986^{9} . 0{,}014^{1} \approx$$
$$\approx 0{,}868 + 0{,}123 = 0{,}991$$

<u>Pregunta 4.2.</u> La probabilidad de que un corredor sufra una caída en un día con lluvia es de 0.08 y en un día seco es de 0.004. La probabilidad de que llueva y se caiga es de 0.032. Hoy un corredor ha salido. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que vuelva a casa sin haberse caído.

b) (1.25 puntos) Hallar la probabilidad de que, sabiendo que se ha caído, no este lloviendo.

Solución:

$$Ll = dia\ de\ lluvia\ ; C = caida \rightarrow \begin{cases} Ll & \begin{cases} C \\ \bar{C} \end{cases} \\ \bar{Ll} & \begin{cases} C \\ \bar{C} \end{cases} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathrm{P(C/Ll)} = 0{,}08\ ;\ \mathrm{P(C/\bar{Ll})} = 0{,}004\ ;\ P(Ll\ \cap C) = 0{,}032$$

a) Aplicamos el teorema de Bayes y el teorema de la probabilidad total:

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) \qquad \rightarrow \qquad P(C) = P(Ll \cap C) + P\left(\bar{Ll} \cap C\right) = P(Ll \cap C) + P\left(\mathrm{C/\bar{Ll}}\right).P\left(\bar{Ll}\right) =$$

$$= P(Ll \cap C) + P\left(\mathrm{C/\bar{Ll}}\right).(1 - P(Ll)) = P(Ll\ \cap C) +\ P\left(\mathrm{C/\bar{Ll}}\right).\left[1 - \frac{P(Ll\ \cap C)}{\mathrm{P(C/Ll)}}\right] =$$

$$= 0{,}032 + 0{,}004\left[1 - \frac{0{,}032}{0{,}08}\right] = 0{,}0344 \qquad \rightarrow \qquad P(\bar{C}) = 1 - 0{,}0344 = 0{,}9656$$

b)

$$P(\bar{Ll}/C)\ = \frac{P\left(\bar{Ll}\ \cap C\right)}{P(C)}\ = \frac{P\left(\mathrm{C/\bar{Ll}}\right).\left[1 - \frac{P(Ll\ \cap C)}{\mathrm{P(C/Ll)}}\right]}{P(C)} = \frac{0{,}0024}{0{,}0344} \approx\ 0{,}0698$$