MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA ORDINARIA - 2025

Pregunta 1.1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)
En el baloncesto existen canastas que valen un punto, otras que valen dos y otras que valen tres puntos. Calcule el número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido sabiendo que:

• El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80% en tiros de uno, del 50% en tiros de dos y del 40% en tiros de tres.

• La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos.

• El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos.

Solución:

x = número de tiros intentados de 1 punto.
y = número de tiros intentados de 2 puntos.
Z = número de tiros intentados de 3 puntos.

$$\begin{cases} 0{,}8x + 0{,}5 \cdot 2y + 0{,}4 \cdot 3z = 80 \\ \dfrac{y}{3} = \dfrac{x+z}{5} \\ 2z = x + y - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}8x + y + 1{,}2z = 80 \\ 5y = 3x + 3z \\ 2z = x + y - 5 \end{cases} \overset{5 \cdot f1}{\Longrightarrow} \begin{cases} 4x + 5y + 6z = 400 \\ 3x - 5y + 3z = 0 \\ x + y - 2z = 5 \end{cases}$$

Resolución mediante Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 121 \qquad \Delta x = \begin{vmatrix} 400 & 5 & 6 \\ 0 & -5 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3025$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 4 & 400 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 3630 \qquad \Delta z = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 400 \\ 3 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3025$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{3025}{121} = 25 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{3630}{121} = 30 \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{3025}{121} = 25$$

Por tanto, el número de tiros anotados son:

- 25 tiros intentados de 1 punto.
- 30 tiros intentados de 2 puntos.
- 25 tiros intentados de 3 puntos.

Pregunta 1.2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Sean la matriz A = $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular el polinomio $P(\lambda) = det(A - \lambda I)$ y hallar las raíces reales del polinomio.

b) (1.25 puntos) Para λ = 5, calcular un vector no nulo $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que satisfaga que $(A - \lambda I) \cdot \vec{v} = \vec{0}$

Solución:

a)

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 7\lambda + 10) = 0 \qquad \lambda = 2 \quad \text{y} \quad \lambda = 5$$

(Resolviendo por adjuntos de la tercera columna)

El polinomio es: $P(\lambda) = (2-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 7\lambda + 10)$ y sus raíces son $\lambda = 2$ y $\lambda = 5$.

b) Partimos de la matriz $(A - \lambda I)$ del apartado anterior. Para $\lambda = 5$ tenemos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Se trata de un sistema lineal homogéneo en el que se cumple: nº parámetros= nº incógnitas -Rg(A).

$$A: \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow Rg(A) = 2 \rightarrow nº\ parámetros = 3 - 2 = 1\ parámetro$$

Como tenemos que $F_2 = -2 \cdot F_1$, tenemos únicamente dos filas linealmente independientes y estamos ante un SCI. Eliminamos la fila 2 y damos el valor α a una letra:

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad x = \lambda \ , \ y = \lambda \ , \ z = \frac{5\lambda}{3}$$

Por lo tanto, para conseguir un vector sustituimos por ejemplo con $\lambda = 3$:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 5 \end{cases} \qquad \boxed{\vec{v} = (3,3,5)}$$

Pregunta 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Un muro rectangular de la biblioteca pública del barrio se va a pintar con la ayuda de unos grafiteros. La dimensión del muro es de 3 metros de alto y 12 metros de largo. Colocando la esquina inferior izquierda del ´ muro en el origen de coordenadas, se va a utilizar la curva $f(x) = \cos(\frac{\pi x}{9}) + 2$ para diferenciar dos regiones del muro que serán pintadas con dos colores distintos. Se sabe que con un bote de spray se pueden pintar 3 metros cuadrados de superficie.

a) (0.75 puntos) Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función f(x) en el intervalo [0, 12]. ¿Está la curva en este intervalo [0, 12] contenida completamente en el muro?

b) (1.25 puntos) Halle el área que tienen que pintar de cada color.

c) (0.5 puntos) ¿Cuantos botes de spray se tienen que comprar como mínimo para pintar toda el área bajo la curva f(x)?

Solución:

a) Para calcular máximos y mínimos, derivamos la función:

$$f'(x) = -sen\left(\frac{\pi x}{9}\right) \cdot \frac{\pi}{9} = 0 \rightarrow \frac{\pi x}{9} = arcsen(0) \rightarrow \frac{\pi x}{9} = k\pi \rightarrow x = 9k \rightarrow 0 \leq x \leq 12$$

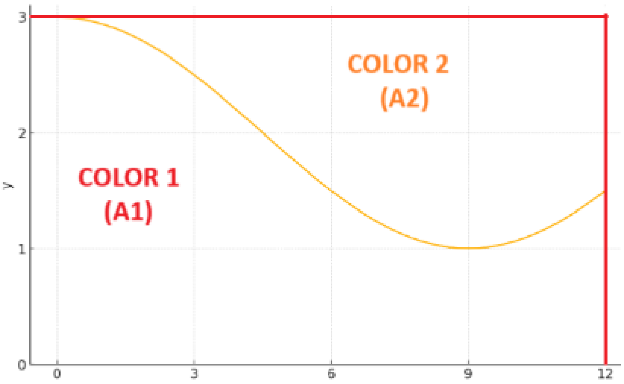
$$x = 0 \quad y \quad x = 9$$

$$f''(x) = -cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) \cdot \frac{\pi}{9} \cdot \frac{\pi}{9} \rightarrow -\frac{\pi^2}{81} cos\left(\frac{\pi x}{9}\right)$$

$f''(0) < 0 \rightarrow máximo\ en\ el\ punto\ (0,3)$

$f''(9) > 0 \rightarrow mínimo\ en\ el\ punto\ (9,1)$

Por lo tanto, la curva sí está contenida en el muro.



b) Existen dos áreas:

$$A_1 = \int_0^{12} \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2\,dx = \frac{9}{\pi}\cdot sen\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2x]_0^{12} \approx 21{,}52\,u^2$$

Para la segunda área, si nos fijamos en la gráfica podemos calcular el área del rectángulo y restarle el área calculado en A_1:

$$A_2 = b\cdot h - A_1 = 12\cdot 3 - 21{,}52 \approx \boxed{14{,}48\,u^2}$$

c) En este apartado nos dice que se necesita un bote de spray para cada $3m^2$, por lo tanto, para el área bajo la curva (A_1):

$$\frac{1\ spray}{3\ m^2} = \frac{x}{21{,}52\ m^2} \quad \rightarrow \quad x = 7{,}17\ botes \approx \boxed{8\ botes\ de\ spray\ necesarios}$$

<u>Pregunta 3.1.</u> (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dados la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$ y el plano $\pi: x + 2y - 3z = 1$, se pide:

a) (0.75 puntos) Hallar una ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a π.

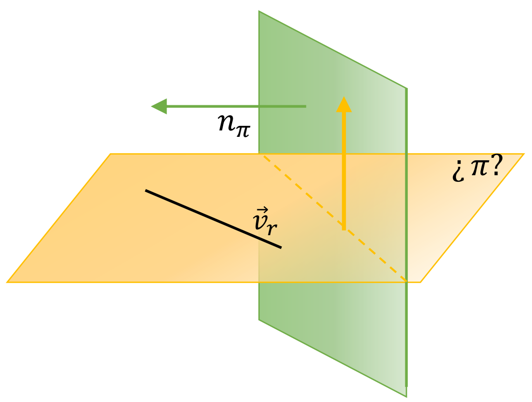
b) (0.75 puntos) Hallar una ecuación de la recta contenida en π que corta perpendicularmente a r.

c) (1 punto) Calcular los puntos de la recta r cuya distancia al plano π es $\sqrt{14}$.

Solución:

a) Para hallar el plano, necesitaremos dos vectores y un punto:

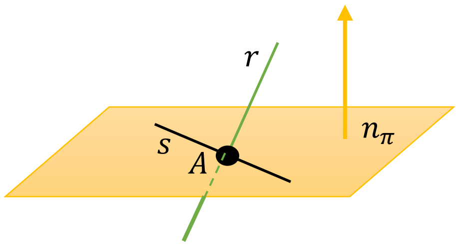
$$\pi: \begin{cases} Pr(1,0,2) \\ \vec{v_r} = (2,0,1) \\ \vec{n_\pi} = (1,2,-3) \end{cases}$$



$$\pi = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \boxed{-2x + 7y + 4z - 6 = 0}$$

b) Hay que comprobar que la recta r y el plano π son secantes:

$$\vec{v}_s \perp \vec{v}_r$$
$$\vec{v}_s \perp \vec{n}_\pi$$



$$\vec{v}_r = (2{,}0{,}1) \;\; y\, \vec{n}_\pi = (1{,}2,-3)$$
$$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = -1 \neq 0$$
Por lo tanto, r y π son secantes.

1º) Hallamos primero el vector. Es un vector perpendicular al vector de r y perpendicular al $\vec{n}_\pi$del plano, por lo tanto, uso el producto vectorial:

$$\vec{v}_s = \vec{v}_r \, x \, \vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k} = (-2{,}7{,}4)$$

2º) Para calcular el punto A, necesitamos la intersección entre el plano y la recta r. Por lo tanto, utilizamos el punto genérico de la recta y lo sustituimos en el plano para ver donde se cortan.

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 0 \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \qquad A \rightarrow r \cap \pi \rightarrow 1 + 2\lambda + 2 \cdot 0 - 3 \cdot (2 + \lambda) = 1 \qquad \lambda = -6$$

Sustituyendo en la recta, el punto de corte A es: $A\,(-11{,}0,-4)$

Finalmente, la recta pedida es:

$$\boxed{s: \begin{cases} x = -11 - 2\lambda \\ y = 0 + 7\lambda \\ z = -4 + 4\lambda \end{cases}}$$

c) El punto de la recta R tendrá la forma $R\,(1 + 2\lambda, 0{,}2 + \lambda)$. Aplicamos la fórmula de la distancia de punto a plano:

$$d(R, \pi) = \frac{|AX_o + BY_o + CZ_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1 + 2\lambda + 2 \cdot 0 - 3 \cdot (2 + \lambda) - 1|}{\sqrt{1 + 2^2 + (-3)^2}} = \sqrt{14}$$

$$|-\lambda - 6| = \sqrt{14} \cdot \sqrt{14}$$

1) $-\lambda - 6 = 14 \rightarrow \boxed{\lambda = -20}$ 2) $-\lambda - 6 = -14 \rightarrow \boxed{\lambda = 8}$

$A(-39{,}0,-18)$ $B(17{,}0{,}10)$

Pregunta 3.2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Sean el punto $P(0,1,1)$ y el plano $\pi: x+y=2$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Hallar la distancia del punto P al plano π.

b) (1 punto) Determinar el punto Q del plano π cuya distancia a P es igual que la distancia de P a π.

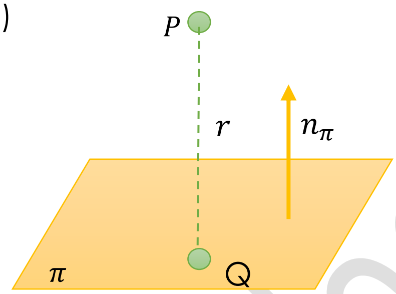
c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por P y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

Solución:

a) $P(0,1,1) \qquad \pi: x+y=2$

$$d(P,\pi)=\frac{|AX_o+BY_o+CZ_o+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|0+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|-1|}{\sqrt{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}\,u$$

b)



$$r:\begin{cases}\vec{n}_\pi=(1,1,0)\\ P(0,1,1)\end{cases} \qquad r:\begin{cases}x=0+\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=1\end{cases}$$

$$Q\rightarrow r\cap\pi \qquad \lambda+1+\lambda-2=0 \qquad \lambda=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{Q\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},1\right)}$$

c) Sacamos primero los puntos de corte del plano con los ejes coordenados:

Eje x (y=z=0) → $r:\begin{cases}x=\lambda\\ y=0\\ z=0\end{cases}$ Punto de corte: $\lambda-2=0 \rightarrow \lambda=2 \qquad A\,(2,0,0)$

Eje y (x=z=0) → $s:\begin{cases}x=0\\ y=\lambda\\ z=0\end{cases}$ Punto de corte: $\lambda-2=0 \rightarrow \lambda=2 \qquad B\,(0,2,0)$

Eje z (x=y=0) → $s:\begin{cases}x=0\\ y=0\\ z=\lambda\end{cases}$ Punto de corte: $0-2\neq 0 \rightarrow$ NO CORTA AL EJE Z

Calculamos vectores $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$, para posteriormente calcular el área:

$$\overrightarrow{PA}=(2,-1,-1) \quad \overrightarrow{PB}=(0,1,-1) \quad \overrightarrow{PA}\,x\,\overrightarrow{PB}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 2&-1&-1\\ 0&1&-1\end{vmatrix}=(2,2,2)$$

Área triángulo: $\frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{PA} \, x \, \overrightarrow{PB}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \boxed{\sqrt{3} \, u^2}$

Pregunta 4.1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Sea $E = \{2,3,5,7,11,13,17,19\}$ un espacio muestral y P una medida de probabilidad en E definida por: $P(7) = P(3) = \frac{1}{4}$ y con el resto de sucesos elementales equiprobables.
Se consideran los sucesos $A = \{7,11,13,19\}, B = \{2,5,7,13,17\}$ y $C = \{3,5,7,11,13\}$.
Se pide calcular:

a) (1.25 puntos) $P(\overline{(A - C)} \cap B)$.

b) (1.25 puntos) $P((A \cap B)|\bar{C})$.

Solución:

$$P(7) = P(3) = \frac{1}{4} \qquad P(2) + P(5) + P(11) + P(13) + P(17) + P(19) = \frac{1}{2}$$

Como son equiprobables, tenemos que $6\,x = \frac{1}{2} \rightarrow \quad x = \frac{1}{12}$ Por lo tanto:

$$P(2) = P(5) = P(11) = P(13) = P(17) = P(19) = \frac{1}{12}$$

a) $A - C = A - (A \cap C) = \{19\} \quad \overline{A - C} = \{2,3,5,7,11,13,17\}$

$$\overline{(A - C)} \cap B = \{2,5,7,13,17\}$$

$$P\left(\overline{(A - C)} \cap B\right) = P(2) + P(5) + P(7) + P(13) + P(17) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \boxed{\frac{7}{12}}$$

b)

$$A \cap B \cap \bar{C} = \emptyset \quad \rightarrow \quad P\left((A \cap B)|\bar{C}\right) = \frac{P(A \cap B \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \boxed{0}$$

No hay ningún número que esté en común en los sucesos $A, B \, y \, \bar{C}$, por lo tanto, la solución es 0.

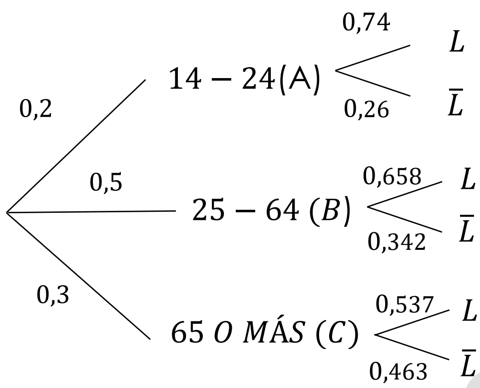
Pregunta 4.2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Entre los ciudadanos de 14 años o más de cierto país, el 20% de la población tiene entre 14 y 24 años, el 50% entre 25 y 64 y el resto más de 64 años. Según datos recogidos por el ministerio de cultura de ese país, el 74% de sus ciudadanos de entre 14 y 24 es lector habitual, mientras que el porcentaje decrece hasta el 65.8% entre los de 25 a 64 y al 53.7% entre los mayores de 64. Elegido un ciudadano al azar del país en cuestión de 14 años o más, se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea lector habitual.

b) (1.25 puntos) Si no es lector habitual, calcular la probabilidad de que tenga entre 25 y 64 años.

Solución:



a)

$$P(L) = P(A) \cdot P(L|A) + P(B) \cdot P(L|B) + P(C) \cdot P(L|C) =$$

$$0{,}2 \cdot 0{,}74 + 0{,}5 \cdot 0{,}658 + 0{,}3 \cdot 0{,}537 = \boxed{0{,}6381}$$

b)

$$P(B|\bar{L}) = \frac{P(B \cap \bar{L})}{P(\bar{L})} = \frac{P(B) \cdot P(\bar{L}|B)}{1 - P(L)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}342}{1 - 0{,}6381} = \boxed{0{,}472}$$