MATEMÁTICAS CCSS II
JULIO 2017/2018
OPCIÓN A

<u>Ejercicio 1.</u> (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ y \ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese la matriz $[(A \cdot A^t)^2 - 2A \cdot A^t]^{11}$.
b) Determínense el número de filas y columnas de la matriz X que verifica que $X \cdot A^t = B^t$. Justifíquese si A^t es una matriz invertible y calcúlese la matriz X.

Solución:

a)

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (A \cdot A^t)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot A^t)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot A^t)^2 - (A \cdot A^t)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[(A \cdot A^t)^2 - 2A \cdot A^t]^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathbf{11}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (3 \quad 2 \quad 3)$, Como nuestra matriz A^t *es* 2x3 y la matriz B^t es 1x3, la matriz X debe ser una 1x2: $X = (a \quad b)$. Para obtenerla hacemos la siguiente operación.

$$(a \quad b) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (3 \quad 2 \quad 3) \to (b \quad a \quad b) = (3 \quad 2 \quad 3) \to a = 2, b = 3 \to X = (2 \quad 3).$$

Una matriz invertible ha de ser cuadrada, mismo número de filas y columnas, y dado que A^t no lo es, no tiene inversa.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

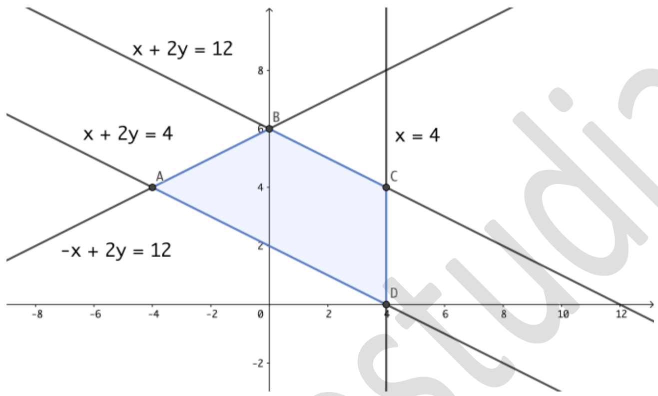
Considérese la región del plano S definida por:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y \geq 4\,, x + 2y \leq 12\,, x \leq 4\,, -x + 2y \leq 12\}$$

a) Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
b) Determínense los puntos en los que la función $f(x, y) = 3x - y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en S, indicando el valor de f en dichos puntos.

Solución:

a) Primero dibujamos la región S:



Para hallar los vértices hacemos la intersección de las rectas dos a dos:

- $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -x + 2y = 12 \end{cases} \rightarrow 4y = 16 \rightarrow y = 4\,, x = -4 \Rightarrow A = (-4{,}4)$
- $\begin{cases} x + 2y = 12 \\ -x + 2y = 12 \end{cases} \rightarrow 4y = 24 \rightarrow y = 6, x = 0 \Rightarrow B = (0{,}6)$
- $\begin{cases} x + 2y = 12 \\ x = 4 \end{cases} \rightarrow y = 4 \Rightarrow C = (4{,}4)$
- $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x = 4 \end{cases} \rightarrow y = 0 \Rightarrow D = (4{,}0)$

b) Ahora sustituimos dichos puntos y obtenemos el máximo y el mínimo.

$$f(A) = f(-4{,}4) = -16 \;\; \rightarrow \textit{mínimo}$$
$$f(B) = f(0{,}6) = -6$$
$$f(C) = f(4{,}4) = 8$$
$$f(D) = f(4{,}0) = 12 \;\; \rightarrow \textit{máximo}$$

Por tanto, la función alcanza el máximo en el punto D=(4,0) con un valor de 12, y el mínimo en A=(-4,4) con un valor de -16.

Ejercicio 3.(Calificación máxima: 2 puntos)

Considérese la función de variable real: $f(x) = \frac{x}{1-4x^2}$

a) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
b) Estúdiense las asíntotas de f.

Solución:

a) Primero veamos el dominio de la función.

$1-4x^2 = 0 \rightarrow 1 = 4x^2 \rightarrow x = \pm 1/2$ por tanto el dominio es D: $\mathbb{R} - \{\pm 1/2\}$
Para el estudio del crecimiento y decrecimiento calculamos la derivada de f y la igualamos a cero para obtener los posibles máximos y mínimos:

$f'(x) = \frac{1-4x^2-x(-8x)}{(1-4x^2)^2} = \frac{1+4x^2}{(1-4x^2)^2} \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow 1+4x^2 = 0 \rightarrow \nexists$ máximos o mínimos.

Además se tiene que la derivada es siempre positiva para cualquier valor por lo que es creciente en todo su dominio.

b) Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-4x^2} = o, \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1-4x^2} = 0,$$ tiene asíntota horizontal en y= 0.

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to 1/2^+} \frac{x}{1-4x^2} = -\infty, \lim_{x\to 1/2^-} \frac{x}{1-4x^2} = \infty$$, asíntota vertical en $x = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to -1/2^+} \frac{x}{1-4x^2} = -\infty, \lim_{x\to -1/2^-} \frac{x}{1-4x^2} = \infty,$$ asíntota vertical en $x = \frac{1}{2}$.

Como tiene asíntotas verticales no tiene oblicuas.

Ejercicio 4.(Calificación máxima: 2 puntos)

Se va a celebrar una carrera popular. Entre los participantes, dos de cada tres hombres y tres de cada cuatro mujeres han entrenado ara la carrera.

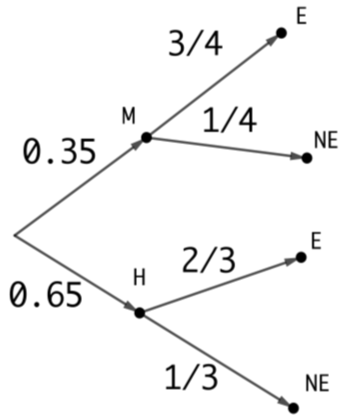
a) Se eligen al azar y de forma independiente un hombre y una mujer de entre los participantes. Calcúlese la probabilidad de que alguno de ellos haya entrenado para la carrera.
b) Si el 65% de los participantes son hombres y el 35% mujeres y se elige un participante al azar, calcúlese la probabilidad de que sea hombre sabiendo que ha entrenado para la carrera.

Solución:

a) Denotamos a la probabilidad de hombre que ha entrenado por $P(HE) = \frac{2}{3}$, y a la probabilidad de mujer que ha entrenado por $P(ME) = \frac{3}{4}$, no están preguntando por la probabilidad de la unión y como ambos sucesos son independientes es directamente la suma de cada uno, es decir

$$P(HE \cup ME) = P(HE) + P(ME) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$$

b) El árbol del problema sería el siguiente:
Una vez tenemos el árbol del problema podemos resolver el ejercicio, nos están preguntando por la probabilidad condicionada.



$$P({}^{H}/_{E}) = \frac{P(H \cap E)}{P(E)} =$$

$$= \frac{P(H) \cdot P({}^{E}/_{H})}{P(H) \cdot P({}^{E}/_{H}) + P(M) \cdot P({}^{E}/_{M})} =$$

$$= \frac{0.65 \cdot \frac{2}{3}}{0.65 \cdot \frac{2}{3} + 0.35 \cdot \frac{3}{4}} = 0.62$$

Ejercicio 5.(Calificación máxima: 2 puntos)

La distancia anual, en kilómetros(km), que recorren las furgonetas de una empresa de reparto, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica $\sigma = 24000$ km.

a) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que la amplitud del intervalo de confianza al 95% para la media sea a lo sumo de 23550 km.
b) Se toma una muestra aleatoria simple de 25 furgonetas. Suponiendo que $\mu = 150000$ km, calcúlese la probabilidad de que la distancia media anual observada, $\bar{X}$, esté entre 144240 km y 153840 km.

Solución:

a) Sabemos que $X \sim N(\mu, 24000)$, además $E = 23550$ y como $1 - \alpha = 0.95 \rightarrow$
$$Z_{\alpha/2} = 1.96$$

Usando la fórmula $E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y despejando n se tiene $n = (\frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E})^2$

$$n = \left(\frac{1.96 \cdot 24000}{23550}\right)^2 = 3.98 \approx 4 \text{ furgonetas.}$$

b) Ahora $n = 25, \mu = 150000$, por lo que $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{24000}{\sqrt{25}}\right) = N(\mu, 4800)$

$$P(144240 \leq \bar{X} \leq 153840) = P\left(\frac{144240 - 150000}{4800} \leq Z \leq \frac{153840 - 150000}{4800}\right) =$$

$$= P(-1.2 \leq Z \leq 0.8) = P(Z \leq 0.8) - P(Z \leq -1.2) = P(Z \leq 0.8) - P(Z \geq 1.2)$$

$$= P(Z \leq 0.8) - [1 - P(Z \leq 1.2)] = P(Z \leq 0.8) + P(Z \leq 1.2) - 1 =$$

$$= 0.7881 + 0.8849 - 1 = 0.673 \text{ es decir, el } 67{,}3\%.$$