MATEMATICAS CCSS II
JULIO 2018
OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro a ϵ R

$$\begin{cases} x + 3y + z = a \\ 2x + y - 6z = 8 \\ x - 3y - 5z = 4 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema en función de los valores del parámetro real a.
b) Resuélvase para a = 4.

Solución:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & a & -6 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & a \\ 2 & a & -6 & 8 \\ 1 & -3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz A y lo igualamos a 0, para obtener los valores del parámetro a para los cuales el determinante de A es nulo:
|A| = -5a -18 -6 – (a-30+18) = -6a -12 → -6a -12 = 0 → a = -2

- Si a ≠ -2 → rango (A) = rango (A*) = 3 → S.C.D.
- Si a = -2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -6 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & a \\ 2 & a & -6 & 8 \\ 1 & -3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos el rango (A):
|A|=0, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 6 = -8 \neq 0$ → rango (A) = 2

Calculamos el rango de A*:
$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 24 + 12 - (4 + 24 - 24) = 24 \neq 0$ → rango(A*) =3 → S.I.

b) Para a = 4

$$A= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aplicamos la regla de Cramer:

Δ = | A | = -36

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & -6 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -144$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & -6 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-144}{-36} = 4$$
$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{0}{-36} = 0$$
$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{0}{-36} = 0$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Los beneficios, en millones de euros, de una determinada inversión vienen dados por la función f(x) = x^3 -12x, donde x representa cierto índice que puede tomar cualquier valor real.

a) Determínese, en caso de que exista, el valor del índice para el que el beneficio es mayor que el de todos los valores de un entorno suyo. ¿Cuál sería el beneficio para ese valor del índice?

b) Supóngase que el valor actual del índice es x = 4 y que está previsto que éste experimente un incremento positivo. Justifíquese si el beneficio aumentará o disminuirá.

Solución:

a)

$$f(x) = x^3 - 12x \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12 \rightarrow f''(x) = 6x$$
$$f'(x) = 0 \rightarrow x = \pm 2$$
$$f''(-2) = -12 < 0 \rightarrow maxímo, \quad f''(2) = 12 > 0 \rightarrow mínimo$$
$$f(-2) = -8 + 24 = 16$$

Por tanto habrá un máximo en -2 y el valor del beneficio será de 16 millones de euros.

b) Como f'(x) > 0 si x > 2, significa que la función será creciente en el intervalo [2, ∞) particularmente lo será en el (4, ∞) y por tanto el beneficio aumentará mundoestudiante métodoBarbeito

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2e^x, & x < 0 \\ \dfrac{2}{x+3}, & x > 0 \end{cases}$$

a) Determínese el dominio de f(x) y estúdiese su continuidad.

b) Calcúlese $\int_{-1}^{0} f(x)dx$

Solución:

a) $f(x) = x^3 + 2e^x$ existe y es continua para cualquier valor de x por ser un polinomio y una exponencial.

$f(x) = \frac{2}{x+3}$ existe y es continua para cualquier valor de x excepto el 3, pero el 3 no está en su domino.

Por lo tanto, solo falta ver qué sucede en el 0.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^3 + 2e^x = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{3}$$

Como los limites laterales en x=0 son distintos la función no es continua en 0 pero sí en el resto de R.

Y el dominio es todo R.

b) $\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} x^3 + 2e^x\, dx = [\frac{x^4}{4} + 2e^x]_{-1}^{0} = \frac{7}{4} - 2e^{-1}$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que P(A) = 0'4, P(B) = 0,6 y $P(A \cup B) = 0{,}8$.

Calcúlese:

a) $P(\overline{A} \cap B)$

b) $P(\overline{A \cup B} \,|\, A)$

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso contrario a S.

Solución:

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B) = 0{,}2$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}4$

b) $P(\overline{A \cup B} \,|\, A) = \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(A)} = 0$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una empresa quiere lanzar un producto al mercado. Por ello desea estimar la proporción de individuos, P, que estarían dispuestos a comprarlo.

a) Asumiendo que la proporción poblacional es P= 0'5, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de individuos para garantizar que, con una confianza del 95%, el margen de error en la estimación no supere el 3% (±3%)
b) Se tomó una muestra aleatoria simple de 450 individuos de los cuales 90 afirmaron que comprarían el producto. Obténgase un intervalo del 90% para la proporción de individuos que estarían dispuestos a comprar el producto.

Solución:

a) P = 0'5, α= 1-0,95 = 0,05

$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

$$\mathrm{E} = z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \rightarrow n = 1068 \text{ personas}$$

b) $a = 1 - 0.90 = 0.10$

c) $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645$

$$\mathrm{IC}: (\hat{P} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \rightarrow IC: (0'169{,}0'231)$$