MATEMÁTICAS II
JULIO 2018
OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos)

Dadas las matrices A=$\begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5\propto \end{pmatrix}$, X=$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y B=$\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{37}{2} \\ 11 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Discutir el rango de la matriz A, en función de los valores del parámetro α
b) Para α = 0, calcular, si es posible, A^{-1}.
c) Resolver, si es posible, el sistema AX = B, en el caso α = 1.

Solución:

a) Lo primero que haremos es calcular el determinante de la matriz A. Lo igualamos a cero y calculamos los distintos valores de **α** para los que el determinante se anula.

$$\begin{vmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5\propto \end{vmatrix} = 14\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 5\propto \end{vmatrix} + 10\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 14(35\propto -20) + 10(-21) =$$

$$490\propto -280 = 490(\propto -1)$$

$$|A| = 0 \rightarrow 490(\propto -1) = 0 \rightarrow \propto -1 = 0 \rightarrow \propto = 1$$

- Si $\propto \neq 1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango A =3
- Si $\propto = 1 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 98 \neq 0 \rightarrow$ Rango A =2

b) $\alpha = 0 \rightarrow \alpha \neq 1 \rightarrow$ existe A^{-1}. $A^{-1} = \frac{1}{|A|} AdjA^t$

$$|A| = 490(0-1) = -490$$

$$|A^t| = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -20 & 40 & -70 \\ 15 & -30 & -70 \\ -21 & -56 & 98 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-490}\begin{pmatrix} -20 & 40 & -70 \\ 15 & -30 & -70 \\ -21 & -56 & 98 \end{pmatrix}$$

c) Resolver, si es posible, el sistema AX = B, en el caso **α** = 1. **α** = 1$\rightarrow |A| = 0 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado, ya que el Rango de A es 2.

$$\begin{vmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \begin{cases} 14x + 10z = 2 \\ 7y + 5z = \dfrac{37}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 14x + 10z = 2 \\ 14x + 10z = 37 \end{cases} \rightarrow$$

$$14y - 14x = 35 \rightarrow x = y - \frac{35}{14}$$

$$z = \frac{37 - 14y}{10} = \frac{37}{10} - \frac{14y}{10}$$

Solución: $\left(\frac{14y-35}{14}, y, \ \frac{37-14}{10}\right)$

<u>Ejercicio 2.</u>(Calificación máxima: 2.5 puntos)

Se considera la función f(x)=$\begin{cases} 8e^{2x-4} & x \leq 2 \\ \frac{x^3-4x}{x-2} & si\ x > 2 \end{cases}$ y se pide:

a) Estudiar la continuidad de f en x = 2.
b) Calcular las asíntotas horizontales de f(x). ¿Hay alguna asíntota vertical?
c) Calcular $\int_0^2 f(x)dx$.

Solución:

a) Se estudia la continuidad de la función en x=2

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3 - 4x}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} x(x+2) = 8$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 8e^{2x-4} = 8$$

$$f(2) = 8e^{2\times 2-4} = 8$$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) \rightarrow f(x)$ es continua en x=2

b) Calculo de las asíntotas horizontales de f(x):

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 - 4x}{x - 2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} 8e^{2x-4} = 0$$

Tiene una asíntota horizontal en y=0 cuando x $\rightarrow -\infty$

No tiene asíntotas verticales ya que para x=2 f(x)= $8e^{2x-4}$

c) $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 dx = 8\frac{1}{2}\int_0^2 2e^{2x-4}\, dx = [4e^{2x-4}]_0^2 = 4 - 4e^{-4} = 4(1 - \frac{1}{e^4})$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos)

Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1,2,3), \vec{v} = (2,0,-1)$ y el punto A $(-4,4,7)$. Se pide:

a) Determinar un vector $\vec{w}$ que sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, unitario y con la tercera coordenada negativa.
b) Hallar un vector no nulo $\vec{w_2}$ que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y ortogonal a $\vec{v}$.
c) Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y una de sus diagonales es el segmento $\overrightarrow{OA}$.

Solución:

a) Para calcular un vector ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ utilizaremos el producto vectorial de ambos vectores:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 4\vec{k} = (2,-5,4)$$

Para que sea un vector unitario dividimos entre su módulo:

$$|(2,-5,4)| = \sqrt{4+25+14} = \sqrt{45} \rightarrow vector\ unitario = \frac{1}{\sqrt{45}}(2,-5,4)$$

Para que la tercera coordenada sea negativa multiplicamos por -1. De esta forma no cambia ni su dirección ni su módulo:

$$\vec{w} = (-1) \times \frac{1}{\sqrt{45}}(2,-5,4) = \frac{1}{\sqrt{45}}(-2,5,-4) = \left(\frac{-2}{\sqrt{45}}, \frac{5}{\sqrt{45}}, \frac{-4}{\sqrt{45}}\right)$$

b) Sea $\vec{w_2} = (x,y,z), \vec{u} = (-1,2,3), \vec{v} = (2,0,-1)$
Si $\vec{w_2}$ es ortogonal a $\vec{v} \rightarrow \vec{w_2} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow 2x - z = 0 \rightarrow 2x = z$
Si $\vec{w_2}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, entonces:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2x + 5y - 4z = 0$$

$$\begin{cases} 2x = z \\ -2x + 5y - 4z = 0 \end{cases} \rightarrow -z + 5y - 4z = 0 \rightarrow 5y = 5z \rightarrow y = z \rightarrow \begin{cases} 2x = z \\ y = z \end{cases}$$

Nos piden un vector, por ejemplo: $\vec{w_2} = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$

c) Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y una de sus diagonales es el segmento $\overrightarrow{OA}$.
Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales por lo tanto no son paralelos. $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son direcciones de lados continuos. Un vértice es O (0,0,0) y otro A $(-4,4,7)$.

Sea r_1 la recta la recta que pasa por el punto O y tiene dirección $\vec{u}$.
Sea r_2 la recta la recta que pasa por el punto A y tiene dirección $\vec{v}$.
Denominamos B a un vértice del paralelogramo. B= $r_1 \cap r_2$

$$r_1=\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases} \qquad r_2=\begin{cases} x = -4+2s \\ y = 4 \\ z = 7-s \end{cases}$$

Resolviendo el sistema formado por las dos rectas $\rightarrow \begin{cases} t = -4+2s \\ 2t = 4 \\ 3t = 7-s \end{cases} \rightarrow t = 2 \rightarrow B(2{,}4{,}6)$

Sea s_1 la recta la recta que pasa por el punto O y tiene dirección $\vec{v}$.
Sea s_2 la recta la recta que pasa por el punto A y tiene dirección $\vec{u}$.
Denominamos C a un vértice del paralelogramo. C= $s_1 \cap s_2$

$$S_1=\begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases} \quad s_2=\begin{cases} x = -4-s \\ y = 4+2s \\ z = 7+3s \end{cases}$$

Resolviendo el sistema formado por las dos rectas $\rightarrow \begin{cases} 2t = -4-s \\ 0 = 4+2s \\ -t = 7+3s \end{cases} \rightarrow s = -2 \rightarrow B(-2{,}0{,}1)$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos)

Según los datos de la Fundación para la Diabetes, el 13.8% de los españoles mayores de 18 años tiene diabetes, aunque el 43% de ellos no sabe que la tiene. Se elige al azar un español mayor de 18 años.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea diabético y lo sepa?, ¿cuál la de que no sea diabético o no sepa que lo es?
b) Cierto test diagnostica correctamente el 96% de los casos positivos de diabetes, pero da un 2% de falsos positivos. Si un español mayor de 18 años da positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que realmente sea diabético?

Solución:

Definimos los sucesos:
A: Tener diabetes $P(A)=0.138$
B: Saber que se tiene diabetes $P(\bar{B}) = 0.43$

a) $P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \rightarrow P(A \cap B) = P(B/A)\cdot P(A)=0.57\cdot 0.138=0.18126$
$P(\bar{B} \cup \bar{A})=P(\overline{B \cap A}) = 1 - 0.18126 = 0.81874$

b) C: Diagnóstico correcto

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{0.138 \cdot 0.96}{0.138 \cdot 0.96 + 0.02 \cdot 0.862} = 0.88$$