MATEMÁTICAS II
JULIO 2018
OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos)

Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza. En comidas cada uno ha gastado: 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además, el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona, que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.

Solución:

Definimos las siguientes variables:
X=días en Francia
Y=días en Alemania
Z=días en Suiza

$$\begin{cases} x+y+z=15 \\ (20+20+8)x+(25+15+8)y+(30+25+8)z=765 \\ x=2z \end{cases} \rightarrow$$

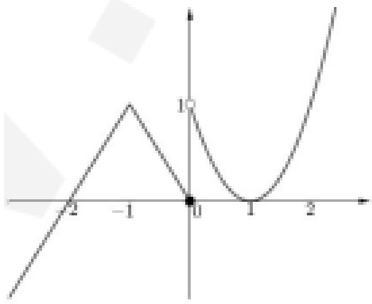
$$\begin{cases} 2z+y+z=15 \\ 96z+48y+63z=765 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=15-3z \\ 159z+48y=765 \end{cases} \rightarrow 159z+48(15-3z)=765$$

$$z=3 \quad y=6 \quad x=6$$

Ejercicio 2.(Calificación máxima: 2.5 puntos)

El dibujo adjunto muestra la gráfica de una función y=f(x). usando la información de la figura, se pide:

a) Indicar los valores de f(1) y f´(-1).
b) Justificar usando los límites laterales, si f es continua en los puntos x=-1 y x=0.



Solución:

a) f(-1)=1

f´(1)=0 ya que la función tiene en x=1 un mínimo

b) x=-1

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=1\end{array}\right\} \to f(x)\ es\ continua\ en\ x=1$$

X=0

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -0^+} f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to -0^-} f(x)=0\end{array}\right\} \to f(x)\ es\ discontinua\ en\ x=0$$

c) $En\ x=0\ no\ es\ derivable\ al\ no\ ser\ continua$
En x=-1 la función es continua, pero su trazado presenta un pico, por lo tanto no se podrían trazar infinitas rectas tangentes, por ello no es derivable.

d) El área que nos piden es el área de un triángulo:
$$A=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{2\cdot 1}{2}=1u^2$$
También lo podemos resolver con una integral:
$$\int_{-2}^{0} f(x)dx=\frac{2\cdot 1}{2}=1u^2$$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos)

Dados el punto P $(0,-1,1)$ y la recta r, que pasa por el punto Q $(1,0,1)$ y tiene como vector director $\vec{u}=(0,1,2)$, se pide:

a) Hallar la ecuación implícita que contiene a r y pasa por P.
b) Encontrar el punto S contenido en r tal que el vector $\overrightarrow{SP}$ sea perpendicular a la recta r.
c) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el punto P y dos puntos T_1, T_2, contenidos en la recta r, que están a distancia $\sqrt{5}$ de P.

Solución:

a) Para calcular el plano tomaremos el punto P, el vector de la recta $\vec{u}$ y el vector $\overrightarrow{PQ}=(1,1,0)$:
$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1\\ y+1 & 1 & 1\\ z-1 & 2 & 0\end{vmatrix}=0\to 2y+2-2x-z+1=0\to -2x+2y-z=0$$

b) Tomamos un punto genérico de la recta r: S $(1,t,1+2t)$,

$$\overrightarrow{SP} = (-1, -1-t, -2t)$$

Para que el vector $\overrightarrow{SP}$ sea perpendicular a la recta ha se ser perpendicular al vector director de la recta. Por lo tanto:

$$\overrightarrow{SP} \cdot \vec{u} = 0 \rightarrow (-1, -1-t, -2t) \cdot (0,1,2) = 0 \rightarrow -1 - t - 4t = 0 \rightarrow t = -\frac{1}{5}$$

El punto S es: $S\left(-1, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$

c) Tomamos un punto genérico de la recta: $T\,(1, t, 1+2t)$ sabemos que la distancia de T a P es $\sqrt{5}$.

$$d(T,P) = \sqrt{5} \rightarrow \|(-1, -1-t, -2t)\| = \sqrt{5} \rightarrow \sqrt{5t^2 + 2t + 2} = \sqrt{5}$$

$$5t^2 + 2t - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = -1 \rightarrow T_1\,(1, -1, -1) \\ t = \frac{3}{5} \rightarrow T_2\,(1, \frac{3}{5}, \frac{11}{5}) \end{cases}$$

$$Área = \frac{|\overrightarrow{T_1P} \times \overrightarrow{T_2P}|}{2} = \frac{\left\|(\frac{16}{5}, \frac{-16}{5}, \frac{8}{5})\right\|}{2} = \frac{\frac{24}{5}}{2} = \frac{24}{10} = 2{,}4u^2$$

$$\overrightarrow{T_1P} \times \overrightarrow{T_2P} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & \frac{-8}{5} & \frac{-6}{5} \end{vmatrix} = \frac{16}{5}\vec{\imath} - \frac{16}{5}\vec{\jmath} + \frac{8}{5}\vec{k} = (\frac{16}{5}, \frac{-16}{5}, \frac{8}{5})$$

<u>Ejercicio 4.</u> (Calificación máxima: 2.5 puntos)

La variable aleatoria X sigue una distribución normal de media $\mu = 8{,}5$ y desviación típica $\sigma = 2{,}5$. Se pide:

a) Calcular el valor a tal que $P(X \le a) = 0{,}05$

b) Calcular la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre 8 y 9,3.

Solución:

N(8,5; 2,5)

a) a tiene que ser negativa

$$P(X \le a) = 1 - P\left(Z \le -\frac{a - 8{,}5}{2{,}5}\right) = 0{,}5 \rightarrow P\left(Z \le -\frac{a - 8{,}5}{2{,}5}\right) = 0{,}95 \rightarrow$$
$$-\frac{a - 8{,}5}{2{,}5} = 1{,}645 \rightarrow a = 4{,}388$$

b)

$$P(8 \le X \le 9{,}3) = P\left(\frac{8 - 8{,}5}{2{,}5} \le Z \le \frac{9{,}3 - 8{,}5}{2{,}5}\right) = P(-0{,}2 \le Z \le 0{,}32) =$$
$$P(Z \le 0{,}32) - P(Z \le -0{,}2) = P(Z \le 0{,}32) - \big(1 - P(Z \le 0{,}2)\big)$$
$$= 0{,}6255 - (1 - 0{,}5793 = 0{,}205)$$