mundoestudiante
métodoBarbeito

MATEMÁTICAS CCSS II
JULIO 2019
OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Calcúlense los valores de a para los cuales la matriz A no tiene inversa.

b) Para $a = 3$, calcúlese la matriz inversa de A y resuélvase la ecuación matricial $AX = B$

Solución:

a) Hay inversa siempre que $|A| \neq 0$, es decir

$$\begin{vmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 2a \rightarrow a^2 - 2a = 0 \rightarrow a(a-2) = 0 \rightarrow a = 0, a = 2$$

Por tanto A^{-1} existirá siempre que $a \neq 0$ y $a \neq 2$.

b) $a = 3 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$

$$|A| = 3, A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow Adj(A^T) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

Se considera la función real de variable real $f(x) = 2x^3 - 8x$.

a) Determínese en qué puntos la tangente a la curva $y = f(x)$ es horizontal.

b) Calcúlese el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x = 0, x = 2$.

Solución:

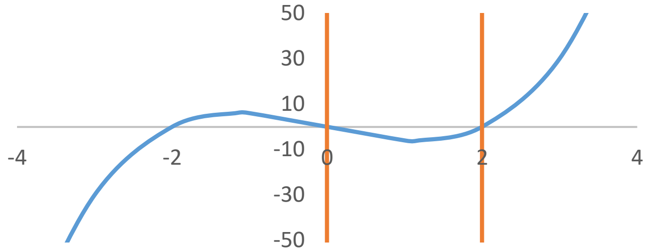
a) Para que la tangente sea horizontal $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 6x^2 - 8. \rightarrow 6x^2 - 8 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{8}{6} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} \rightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - 8\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{32\sqrt{3}}{9} \rightarrow el\ punto\ \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{32\sqrt{3}}{9}\right)$$

$$f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 2\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - 8\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{32\sqrt{3}}{9} \rightarrow el\ punto\ \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{32\sqrt{3}}{9}\right)$$

b) Representamos la función, como el área está por debajo del eje de las x usamos valor absoluto.



$$Área = \left|\int_0^2 (2x^3 - 8x)dx\right| = \left|\left[\frac{2x^4}{4} - \frac{8x^2}{2}\right]_0^2\right| = \left|\left(\frac{32}{4} - \frac{32}{2}\right) - (0)\right| = |-8| = 8.$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.
Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2-9} & si\ x < 3 \\ x^2 - 4 & si\ x \geq 3 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de f.
b) Determínese si f tiene asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.

Solución:

a) Para $x > 3$ Es continua por ser una función polinómica. Para $x < 3$, Por ser una función racional, el denominador tiene que ser distinto de cero.

$$x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3 \ \rightarrow x\ es\ contínua\ \forall x \in \mathbb{R} - \{\pm 3\}$$

b) Asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 - 4 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2-9} = \frac{-\infty}{+\infty} = IND = -\infty$$

No hay asíntota horizontal.

Asíntota vertical: la estudiamos en los puntos en los que no tenemos dominio.

x=3

$$\lim_{x\to+3^+} f(x) = \lim_{x\to+3^+} x^2 - 4 = 5$$

$\lim_{x\to+3^-} f(x) = \lim_{x\to+3^-} \frac{x^3}{x^2-9} = -\infty$ hay asíntota vertical en x=3^-

x=-3

$$\lim_{x\to-3^-} f(x) = \lim_{x\to+3^-} \frac{x^3}{x^2-9} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-3^+} f(x) = \lim_{x\to+3^-} \frac{x^3}{x^2-9} = +\infty$$

hay asíntota vertical en x=-3

Asíntota oblicua:

$$f(x) = x^2 - 4 \rightarrow m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4}{x} = +\infty \rightarrow No\ hay$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-9} \rightarrow$$

$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-9}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^3-9x} = \frac{+\infty}{+\infty} = IND = 1$ por comparación de grados

$n = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2-9} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{9x}{x^2-9} = \frac{+\infty}{+\infty} = IND = 0$ por comparación de grados.

Por tanto y=x es una asíntota oblicua

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.
Los escolares de un cierto colegio de Madrid fueron encuestados acerca de su alimentación y de su ejercicio físico. Una proporción de 2/5 hacían ejercicio regularmente y 2/3 siempre desayunaban. Además, entre los que siempre desayunan, una proporción de 9/25 hacía ejercicio regularmente. Se elige al azar un escolar de ese colegio

a) ¿Es independiente que siempre desayune y que haga ejercicio regularmente?
b) Calcúlese la probabilidad de que no siempre desayune y no haga ejercicio regularmente.

Solución:

Sean D=desayunar, E=ejercicio física, siendo $\bar{D}$ y $\bar{E}$ sus contrarios

$$P(D) = \frac{2}{3}, P(E) = \frac{2}{5}, P\left({}^{E}/_{D}\right) = \frac{9}{25}$$

a) $Dos\ sucesos\ son\ independientes\ si\ P(E) * P(D) = P(E \cap D)$

$$P\left({}^{E}/_{D}\right) = \frac{P(E \cap D)}{P(D)} \rightarrow P(E \cap D) = P\left({}^{E}/_{D}\right) * P(D) \rightarrow P(E \cap D) = \frac{6}{25}$$

$$P(D) * P(E) = \frac{4}{15} \neq \frac{6}{25} = P(E \cap D) \rightarrow No\ son\ independientes.$$

b) $P(\bar{D} \cap \bar{E}) = 1 - P(D \cup E) = 1 - \frac{62}{75} = \frac{13}{75}$

$$P(D \cup E) = P(D) + P(E) - P(E \cap D) \rightarrow P(D \cup E) = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{6}{25} = \frac{62}{75}$$

Ejercicio 5. Calificación máxima: 2 puntos.
Una máquina rellena de paquetes de harina. El peso de la harina en cada paquete se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 25 gramos.

a) Se analiza el peso del contenido de 15 paquetes. La media muestral de estos pesos resulta ser 560 gramos. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95% para la media poblacional.
b) Se sabe que la media poblacional del peso de la harina de un paquete es 560 gramos. Calcúlese la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 565 gramos para una muestra de 50 paquetes.

Solución:

a) $X \sim N(\mu, 25), n = 15, \bar{X} = 560, \alpha = 0.05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$$I.C \equiv \left(\bar{X} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(560 \pm 1.96 \frac{25}{\sqrt{15}}\right) = (547.35, 572.65)$$

b) $\mu = 560 \rightarrow X \sim N(560{,}25) \rightarrow \bar{X} \sim N\left(560, \frac{25}{\sqrt{50}}\right)$ *por el teorema central del límite*

Que no sea menor, es lo mismo que sea mayor o igual, $P(\bar{X} \geq 565)$

$$P(\bar{X} \geq 565) = P\left(\frac{\bar{X} - 560}{25/\sqrt{50}} \geq \frac{565 - 560}{25/\sqrt{50}}\right) = P(Z \geq 1.41) = 1 - P(Z < 1.41)$$

$= 1 - 0.9207 = 0.0793 \rightarrow 7.93\%$ *de probabilidad.*