



MATEMÁTICAS II
JULIO 2019
OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos).

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} kx + (k+1)y + z = 0 \\ -x + ky - z = 0 \\ (k-1) - y = -(k+1) \end{cases}$, se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k .

b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $k=1$.

Solución:

a) Obtenemos las matrices A (denominada matriz de coeficientes) y B (denominada matriz ampliada).

$$A = \begin{bmatrix} k & k+1 & 1 \\ -1 & k & -1 \\ k-1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} k & k+1 & 1 & 0 \\ -1 & k & -1 & 0 \\ k-1 & -1 & 0 & -(k+1) \end{bmatrix}$$

Procederemos a calcular el determinante de A e igualarlo a cero para así poder determinar los valores de k y poder hacer la discusión del sistema en cuestión.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & k+1 & 1 \\ -1 & k & -1 \\ k-1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 - (k^2 - 1) - [k^2 - k + k + 0] = -2k^2 + 2 = 0 \rightarrow k = \pm 1$$

Ahora estudiaremos los rangos de ambas matrices en función de esos valores de k obtenidos:

✓ Si $k \neq \pm 1$.

En este caso, el determinante de A será distinto de cero y por lo tanto, el rango de A será 3. Por otro lado, en el rango de B (dado que hay un determinante, que es el determinante de A, que es distinto de cero) será también 3. Teniendo en cuenta ello, se cumple que:

$$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(B) = n^\circ \text{ incógnitas} \rightarrow (3=3=3) \rightarrow \text{S.C.D.}$$

✓ Si $k=1$

Las matrices A y B serán:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Procederemos a estudiar los rangos de ambas matrices.



$$\text{Rg (A): } |A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0 \rightarrow \text{Rg (A)} = 2$$

$$\text{Rg (B): } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 0 - 0 - 0 - 4 = -6 \neq 0 \rightarrow \text{Rg (B)} = 3$$

Como $\text{Rg (A)} \neq \text{Rg (B)} \rightarrow \text{S.I.}$

✓ Si $k=-1$.

Las matrices A y B serán:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Procederemos a estudiar los rangos de ambas matrices, teniendo en cuenta que el sistema resultante será un **sistema homogéneo**, los rangos de ambas matrices serán iguales y por lo tanto, sólo será necesario determinar el rango de A.

$$\text{Rg (A): } |A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rg (A)} = \text{Rg (B)} = 2$$

Como $\text{Rg (A)} = \text{Rg (B)} < n^\circ \text{ incógnitas} \rightarrow \text{S.C.I.}$

b) Para $k=-1$. Como ya hemos visto en el apartado anterior, estamos ante un sistema homogéneo, el cual es un sistema compatible indeterminado que procederemos a resolver a continuación.

$N^\circ \text{ incógnitas} - \text{Rg (A)} = n^\circ \text{ de indeterminaciones} \rightarrow (3-2 = 1)$.

Cogeremos dos ecuaciones para resolver el sistema pasando la "x" (que pasaría a ser una indeterminación).

$$\begin{cases} -x + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = x = \lambda \\ -y - z = \lambda \end{cases} \rightarrow x = z = \lambda, y = -2\lambda$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2.5 puntos).

a) (1.25 puntos) Sean f y g dos funciones derivables de las que se conocen los siguientes datos:

$$f(1) = 1, f'(1) = 2, g(1) = 3, g'(1) = 4$$

Dada $h(x) = f((x+1)^2)$, use la regla de la cadena para calcular $h'(0)$. Dada $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, calcule $k'(1)$.

b) (1.25 puntos) Calcule la integral $\int (\sin x)^4 \cdot (\cos x)^3 dx$. Se puede usar el cambio de variable $t = \sin(x)$.

Solución:

a) Para la derivada de la función $h(x)$, emplearemos la **regla de la cadena**, quedando la derivada así:

$$h'(x) = 2 \cdot (x+1) \cdot f'((x+1)^2) \rightarrow h'(0) = 2 \cdot 1 \cdot f'(1) = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$$

En el caso de la derivada de $k(x)$, aplicaremos la derivada de un cociente, quedando la derivada en cuestión de la siguiente manera:



$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow k'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \rightarrow k'(1) = \frac{f'(1) \cdot g(1) - f(1) \cdot g'(1)}{[g(1)]^2} = \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 4}{3^2} \rightarrow k'(1) = \frac{2}{9}$$

b) Para hacer esta integral, operaremos de la siguiente manera:

$$\int \sin^4(x) \cdot \cos^3(x) dx = \int \sin^4(x) \cdot \cos(x) \cdot [1 - \sin^2(x)] dx = \int \sin^4(x) \cos(x) dx - \int \sin^6(x) \cos(x) dx = \frac{\sin^5(x)}{5} - \frac{\sin^7(x)}{7} + C$$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos)

Dados los puntos A (1,1,1), B (1,3,-3), C (-3,-1,1), se pide:

- (1 punto) Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.
- (0.5 puntos) Obtener un punto D (distinto de A, B y C) tal que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$, sean linealmente independientes.
- (1 punto) Encontrar un punto P del eje OX, de modo que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P sea igual a 1.

Solución:

a) Supongamos un punto genérico P (x, y, z) y determinaremos los vectores $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AP} = (x-1, y-1, z-1); \overrightarrow{AB} = (0, 2, -4); \overrightarrow{AC} = (-4, -2, 0)$$

$$\begin{aligned} \pi \equiv \det(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (x-1) \cdot (0-8) - (y-1) \cdot (0-16) + (z-1) \cdot (0+8) = 0 \\ &\rightarrow -8x + 16y + 8z - 16 = 0 \rightarrow x - 2y - z + 2 = 0 \end{aligned}$$

b) Para que sean linealmente dependientes, se debe cumplir que:

$$\overrightarrow{AD} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$$

Dado que habrá infinitas soluciones, nos quedaremos con la siguiente condición:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \rightarrow (x-1, y-1, z-1) = (0, 2, -4) + (-4, -2, 0)$$

De aquí, igualando las componentes de ambos términos, obtenemos que el punto será D (-3, 1, -3)

c) Para determinar el volumen del tetraedro, necesitamos determinar los tres vectores. Los vectores obtenidos con los puntos A-B y A-C ya están determinados en apartados anteriores, y el vector formado por los puntos A-P será (x-1, -1, -1). Aplicando la expresión del volumen del tetraedro, obtenemos la coordenada pedida



$$V_{TETRAEDRO} = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow |0 - 16 + 0 - 8 - 8x + 8 + 0| = 6$$
$$\rightarrow \begin{cases} -8x - 16 = 6 \rightarrow x = -11/4 \\ 8x + 16 = 6 \rightarrow x = -5/4 \end{cases}$$

Debido a que, para el cálculo, se requiere de un valor absoluto (HAY VOLUMENES NEGATIVOS); aparecen dos soluciones.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos)

Una empresa ha llevado a cabo un proceso de selección de personal.

a) (1.25 puntos) Se sabe que el 40% del total de aspirantes han sido seleccionados en el proceso. Si entre los aspirantes había un grupo de 8 amigos, calcule la probabilidad de que al menos 2 de ellos hayan sido seleccionados.

b) (1.25 puntos) Las puntuaciones obtenidas por los aspirantes en el proceso de selección siguen una distribución normal, X , de media 5.6 y desviación típica σ . Sabiendo que la probabilidad de obtener una puntuación $X \leq 8.2$ es 0.67, calcule σ .

Solución:

a) Se muestran los datos de una distribución binomial. Definimos X (número de aspirantes seleccionados) que sigue una distribución binomial cuyos parámetros son: $n=8$, $a=2$, $p=0.4$, $q=0.6$.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 1) + P(X = 0)] \rightarrow P(X \geq 2)$$
$$= 1 - \left[\binom{8}{0} \cdot 0.4^0 \cdot 0.6^8 + \binom{8}{1} \cdot 0.4^1 \cdot 0.6^7 \right] = 0.8936$$

b) En este caso, las puntuaciones siguen una distribución normal de la cual, conocemos la media pero no la desviación típica. A partir del dato de $P(X \leq 8.2) = 0.67$, "destipificando" y con la ayuda de la tabla de la distribución normal podremos tener la desviación típica.

$$P(X \leq 8.2) = 0.67 \rightarrow \frac{8.2 - 5.6}{\sigma} = 0.44 \rightarrow 2.6 = 0.44\sigma \rightarrow \sigma = 5.90$$