MATEMÁTICAS II
JULIO 2019
OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos)

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular los para qué valores de $a \epsilon R$ se verifica que A^2-I= $2A$.
b) (0.75 puntos) Calcular los números reales *a* para los que la matriz A tiene inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro *a*.
c) (0.75 puntos) Calcular, en función de *a*, el determinante de la matriz $(AA^t)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de *A*.

Solución:

a) Planteamos la expresión, sustituyendo las matrices y operando, tenemos lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} (1-a)^2+1 & 2 \\ 2 & (1+a)^2+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2a & 2 \\ 2 & 2+2a \end{pmatrix}$$

Operando e igualando términos tenemos lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} (1-a)^2 & 2 \\ 2 & (1+a)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2a & 2 \\ 2 & 2+2a \end{pmatrix} \to \begin{cases} (1-a)^2 = 2-2a \to a = \pm 1 \\ (1+a)^2 = 2+2a \to a = \pm 1 \end{cases}$$

b) Para calcular la inversa de una matriz, necesitamos primeramente calcular el determinante e igualarlo a cero para así poder determinar cuándo no se podrá determinar la matriz inversa.

$$|A| = 0 \to \begin{vmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{vmatrix} = 0 \to 1-a^2-1 = 0 \to -a^2 = 0 \to a = 0$$

Para a = 0, la matriz no tendrá inversa. En función de a, la matriz inversa será:

$$Adj\ (A) = \begin{bmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{bmatrix} \to \left(Adj\ (A)\right)^T = \begin{bmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{bmatrix}$$

Una vez calculadas las matrices adjuntas y transpuesta de la adjunta de A, se procederá a determinar la inversa.

$$A^{-1} = \frac{1}{-a^2} \cdot \begin{bmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2} \cdot \begin{bmatrix} -(1+a) & 1 \\ 1 & a-1 \end{bmatrix}$$

c) $\det(AA^t)^2 = |A \cdot A^t| \cdot |A \cdot A^t| = |A| \cdot |A| \cdot |A| \cdot |A| = (-a^2)^4 = a^8$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2.5 puntos)

Un brote de una enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El número de enfermos *t* días después de iniciarse el brote viene dado por una función *F(t)* tal que *f´(t)= t²(10-t)*.

a) (1 punto) Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función *F(t)*.

b) (1 punto) Calcule cuantos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.

c) (0.5 puntos) Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuántos días dura el brote.

Solución:

a) Como tenemos la primera derivada (f´(t)) lo que haremos será integrar dicha función para obtener F(t).

$$F(t) = \int f'(t)dt = \int t^2 \cdot (10-t)dt = -\frac{t^4}{4} + \frac{10}{3}t^3 + C$$

Como nos dice el enunciado del apartado, en el instante inicial hay 6 personas contagiadas. Por lo tanto:

$$F(0) = 6 \to C = 6 \to F(t) = -\frac{t^4}{4} + \frac{10}{3}t^3 + 6$$

b) Para determinar los puntos críticos de la función, necesitamos determinar la primera derivada de la función que, en este caso, nos la proporciona el enunciado. Por ello, lo que haremos será directamente igualar a cero la primera derivada.

$$f'(t) = t^2 \cdot (10-t) = 0 \to \begin{cases} t = 0 \\ t = 10 \end{cases}$$

Para dilucidar si son máximos o mínimos, existen dos posibles caminos igualmente válidos:

- ✓ Estudiando el signo de la primera derivada. Así, determinamos tanto crecimiento y decrecimiento de la función como los máximos y los mínimos.
- ✓ Calculando la segunda derivada y estudiando los valores que anulan la primera derivada.

$$f''(t) = 20t - 3t^2 \to \begin{cases} f''(0) = \ 0\ (no\ máx\ ni\ min\ ) \to \text{Punto inflexión} \\ f''(10) = \ -100 < 0 \to Máximo \end{cases}$$

El máximo de la función será en (10, 839.3)

c) En este caso, necesitamos saber cuándo el número de enfermos es nulo, es decir cuando pasa de positivo a negativo. Por ello, podemos aplicar el **teorema de Bolzano:**

Para poder aplicarlo, se tienen que cumplir que:

- **La función sea continua en dicho intervalo.**
- **Que la función en los extremos del intervalo, cambie de signo.**

En este caso, se ha visto que la función en F(13) y en F(14), cuyo valores son respectivamente 2269/12 y -1354/3. Por tanto, diremos que:

Por el teorema de Bolzano: $\exists c \in (13,14) / \ f(c) = 0$

Por ello, diremos que el brote durará entre 13 y 14 días.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos)

Dados el plano, $\pi \equiv 2x + 3y - z = 4$, y las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ y $s \equiv (x, y, z) = (1,2,3) + \lambda(1,0,1)$, con λ ∈ R, se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto simétrico de P(1,2,3) respecto de π.
b) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano π, que pasa por el punto de intersección de las rectas r y s.
c) (0.5 puntos) Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas r y s.

Solución:

a) Para determinar el punto simétrico respecto al plano dado, seguiremos los pasos siguientes:

I. Determinamos la recta (t) perpendicular al plano y que pase por el punto P. Como recta y plano son perpendiculares entre sí, sus vectores son paralelos.

$$t \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

II. Intersecamos la recta (t) con el plano, para así calcular el punto medio (M) entre los puntos P y P´.

$$2(1 + 2\lambda) + 3(2 + 3\lambda) - (3 - \lambda) = 4 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{14} \rightarrow M(\frac{6}{7}, \frac{25}{14}, \frac{43}{14})$$

III. Calculamos P´.

$$\frac{P + P'}{2} = M \rightarrow P' = 2M - P \rightarrow P'(\frac{5}{7}, \frac{11}{7}, \frac{17}{7})$$

b) Primero determinaremos el punto de intersección (Q) entre ambas rectas. Para ello, sustituiremos la recta s en la recta r.

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}; \quad s \equiv (x, y, z) = (1,2,3) + \lambda(1,0,1), \rightarrow \ Q(-1,2,1)$$

Dado que la recta que buscamos (v) es perpendicular al plano, el vector director de la recta será el mismo que el vector normal del plano. Por ello, la recta problema será:

$$v \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \; ; \; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

c) Determinaremos, primeramente, los vectores de cada recta. Como la recta r viene definida por 2 planos, realizaremos el producto vectorial de ambos.

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j}, \overrightarrow{u_s} = (1,0,1)$$

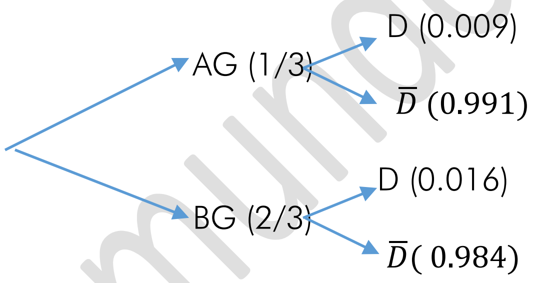
$$\cos(\widehat{r,s}) = \frac{|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_r}| \cdot |\overrightarrow{u_s}|} = \frac{2}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \rightarrow (\widehat{r,s}) = 60º$$

<u>Ejercicio 4.</u> (Calificación máxima: 2.5 puntos).

Un concesionario dispone de vehículos de baja y alta gama, siendo los de alta gama 1/3 de las existencias. Entre los de baja gama, la probabilidad de tener un defecto de fabricación que obligue a revisarlos durante el rodaje es del 1.6%, mientras que para los de alta gama es del 0.9%. En un control de calidad preventa, se elige al azar un vehículo para examinarlo.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que el vehículo elegido resulte defectuoso.
b) (1.5 puntos) Si se comprueba que el vehículo elegido es defectuoso, calcule la probabilidad de que sea de gama baja.

Solución:

a) Denominaremos como: Alta gama (AG), Baja gama (BG), defectuoso (D) y no defectuoso ($\overline{D}$). Plateamos el diagrama en árbol pertinente, el cual, se muestra a continuación.



Teniendo en cuenta el diagrama en árbol, procedemos a calcular, aplicando la regla de la probabilidad total, la probabilidad de que el vehículo sea defectuoso.

$$P(D) = P(AG) \cdot P\left(\frac{D}{AG}\right) + P(BG) \cdot P\left(\frac{D}{BG}\right) = \frac{1}{3} \cdot 0.009 + \frac{2}{3} \cdot 0.016 = 0.013\overline{6}$$

b) En este caso, tenemos que aplicar la regla de Bayes para calcular P(BG/D).

$$P\left(\frac{BG}{D}\right) = \frac{P(BG \cap D)}{P(D)} = \frac{P(BG) \cdot P(\frac{D}{BG})}{P(D)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0.016}{0.013\overline{6}} = 0.78048$$