MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II
JULIO 2020

A. 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real *a*:

$$\left.\begin{array}{r} x + ay = 0 \\ x + 2z = 0 \\ x + ay + (a+1)z = a \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro *a*.
b) Resuelva el sistema para *a* = 0.

Solución:

a) En este ejercicio de discusión de sistemas, deberemos sacar previamente la matriz de coeficientes (A) y la matriz ampliada (B), para así poder determinar (mediante el teorema de Rouché-Frobenius) qué tipo de sistema tenemos según los valores del parámetro *a*.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & a+1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & a & a+1 & a \end{bmatrix}$$

Ahora, calcularemos el determinante de A (ya que es la única matriz cuadrada) para poder sacar los valores de a que hacen cero ese determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & a+1 \end{vmatrix} = 0 \to 0 + 2a + 0 - [0 + 20 + a \cdot (a+1)] = 0 \to$$
$$-a^2 - a = 0 \to \ -a(a+1) = 0$$

Resolviendo esa ecuación por 2º grado obtenemos que el determinante de A se anula cuando a = 0 y a = -1. Ahora procedemos a calcular los rangos de ambas matrices según los parámetros de a.

- Si $a \neq 0 \; y \; a \neq -1$. El determinante de A tendrá un valor distinto de cero, por lo que: Rg(A) = Rg (B) = nº incógnitas = 3 (S.C.D.)
- Si a = -1,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Rg (A): $|A| = 0 \to \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - -1 = 1 \neq 0 \to Rg\ (A) = 2$

Rg (B): $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - (0 + 1 + 0) = \ -1 \neq 0 \to Rg\ (B) = 3$

Dado que **Rg (A) ≠ Rg (B)→ S.I.**

- Si a = 0,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como vemos, para este valor de a, el sistema obtenido es un **sistema homogéneo** y por ello, el rango de A y el de B será el mismo. Por ello sólo calcularemos el rango de A.

Rg (A): $|A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0 \rightarrow Rg\ (A) = 2 = Rg\ (B)$

Como **Rg (A) = Rg (B) < n° incógnitas→ S.C.I.**

b) Como vimos en el apartado anterior, para a = 0, tenemos un sistema compatible indeterminado (S.C.I.). A continuación, resolvemos el sistema dado.

N° incog. – Rg (A) = n° Indeterminaciones→ 3 – 2 = 1

Tomaremos 2 ecuaciones y resolveremos el sistema.

$$\left.\begin{array}{r} x = 0 \\ x + z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{y = \lambda} \\ \boldsymbol{z = 0} \end{cases}$$

Como vemos, en ninguna de las ecuaciones aparece la incógnita "y" será la indeterminación de la solución de este sistema.

<u>A.2.</u> (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4$$

a) Calcule el dominio de la función y obtenga el valor que hay que asignar a $f(x)$ en $x = 0$ para que la función anterior sea continua en ese punto.
b) Obtenga las asíntotas de esta función en caso de que existan.

Solución:

a) Dado que tenemos una función compuesta por una función racional y un número que está sumando; el dominio de la función vendrá definido por la parte racional de f(x). Por ello, deberemos igualar a cero el denominador.

$3x + x^2 = 0 \rightarrow x \cdot (3 + x) = 0 \rightarrow x = 0; x = -3. \rightarrow \boldsymbol{Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{0, -3\}}$

En cuanto al valor que debería tomar la función en x = 0, (la función presentará en ese punto una **discontinuidad evitable**) lo determinaremos calculando el límite de la función cuando x tiende a 0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x-x^3}{3x+x^2}+4=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-x^3+4x^2+16x}{3x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(-x^2+4x+16)}{x\cdot(3+x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(-x^2+4x+16)}{(3+x)}=\frac{16}{3}$$

Por lo tanto, $f(0)=\frac{16}{3}$

b) Para el cálculo de las asíntotas, haremos el estudio de cada una de ellas.

- <u>Asíntota vertical</u>: estudiaremos sólo los límites laterales en torno a -3.

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{4x-x^3}{3x+x^2}+4=+\infty$$
$$\lim_{x\to -3^+}\frac{4x-x^3}{3x+x^2}+4=-\infty$$

Por lo tanto, vemos que la función presenta **asíntota vertical** en **x=-3.**

- <u>Asíntota horizontal</u>:

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{4x-x^3}{3x+x^2}+4=\frac{\infty}{\infty}\to (G.numerador > G.denominador)\to \infty$$

Al no presentar asíntota horizontal, estudiaremos la asíntota oblicua.

- <u>Asíntota oblicua.</u>

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x-x^3}{3x+x^2}+4}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-x^2+4x+16}{3+x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+4x+16}{(3+x)\cdot x}=-1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-x^3}{3x+x^2}+4-(-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+4x+16}{3+x}+x=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+4x+16+3x+x^2}{3+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7x+16}{3+x}=7$$

Por lo tanto, la función presenta asíntota oblicua siendo su ecuación, y = - x + 7.

A.3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x) = -x^4 + x^3 + 2x^2$$

a) Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa x = -1
b) Obtenga el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$ y el eje de abscisas para valores de x > 0.

Solución:

a) La expresión general de la recta tangente es la siguiente:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Siendo x_0 = -1, calcularemos f (-1) y f´ (-1).

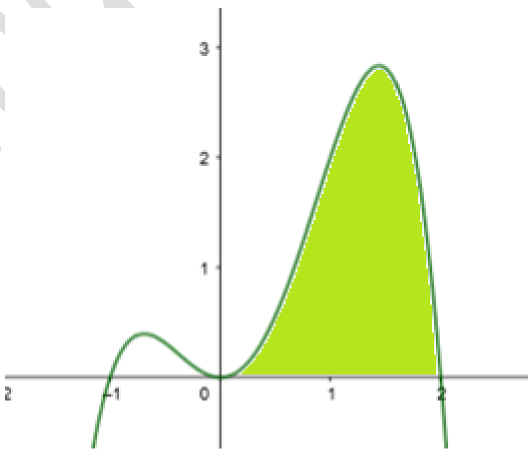
$$f(-1) = -(-1)^4 + (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 = 0$$
$$f'(x) = -4x^3 + 3x^2 + 4x \rightarrow f'(-1) = -4(-1)^3 + 3(-1)^2 + 4(-1) = 4 + 3 - 4 = +3$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente será: y- 0 = 3·(x-(-1))→ **y = 3x + 3**

b) En este caso, deberemos calcular los puntos de corte con el eje X para así poder determinar la región a calcular.

$$-x^4 + x^3 + 2x^2 = 0 \rightarrow -x^2 \cdot (x^2 - x - 2) = 0 \rightarrow x = 0; x = -1; x = 2.$$

Dada la condición marcada por el enunciado, sólo nos quedaremos con los valores 0 y 2. A continuación, se muestra una representación de la función para así poder tener una idea de la región.



El área, dado que queda por encima del eje X, será positiva y se calculará de la siguiente forma:

$$A = \int_0^2 (-x^4 + x^3 + 2x^2)\, dx = \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = \left(-\frac{32}{5} + \frac{16}{4} + \frac{16}{3}\right) - 0 = \frac{44}{15}u^2$$

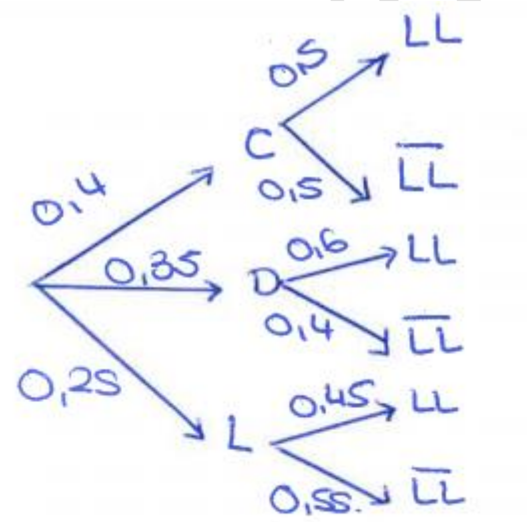
A.4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Una asociación de senderismo ha programado tres excursiones para el mismo fin de semana. El 40 % de los socios irá al nacimiento del río Cuervo, el 35% a las Hoces del río Duratón y el resto al Cañón del río Lobos. La probabilidad de lluvia en cada una de estas zonas se estima en 0,5, 0,6 y 0,45, respectivamente. Elegido un socio al azar:
a) Calcule la probabilidad de que en su excursión no llueva.
b) Si en la excursión realizada por este socio ha llovido, ¿cuál es la probabilidad de que este socio haya ido al nacimiento del río Cuervo?

Solución:

a) Primeramente, definimos los sucesos:

C - excursión Río Cuervo
D - excursión Hoces río Duratón
L - excursión río Lobos
LL – fin de semana lluvioso

El diagrama en árbol, que se muestra a continuación, es el siguiente:



$$P(\overline{LL}) = P(C) \cdot P(\overline{LL}/C) + P(D) \cdot P(\overline{LL}/D) + P(L) \cdot P(\overline{LL}/L) = 0.4 \cdot 0.5 + 0.35 \cdot 0.4 + 0.25 \cdot 0.55 = 0.4775$$

b) Aplicando la regla de Bayes, podremos obtener la probabilidad condicionada que nos piden.

$$P(C/LL) = \frac{P(C \cap LL)}{P(LL)} = \frac{P(C) \cdot P(LL/C)}{1 - P(\overline{LL})} = \frac{0.4 \cdot 0.5}{1 - 0.4775} = 0.3828$$

A.5. (Calificación máxima: 2 puntos)

La publicidad de una marca de bolígrafos afirma que escriben 2 km. Para realizar un control de calidad, se considera que la longitud de escritura de estos bolígrafos puede aproximarse por una variable aleatoria con una distribución normal de media μ y desviación típica 0,5 km.
a) Obtenga el número mínimo de bolígrafos que deberían seleccionarse en una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, sea como 0,05 km con un nivel de confianza de 95,44 %.
b) Si la longitud media de escritura, μ, es la anunciada en la publicidad, calcule la probabilidad de que, con una muestra de 16 bolígrafos elegidos al azar, se puedan escribir más de 30 km.

Solución:

a) En este caso tenemos una distribución normal, de la cual solo conocemos la desviación típica (σ) de 0,5 km, siento la media poblacional (μ) desconocida en este apartado. Por lo que la longitud de escritura de los bolígrafos, podremos decir que sigue una distribución normal N (μ; 0,5).

Por otro lado, nos dan el nivel de significación (α) que tiene un valor 95,44% (0,9544), siendo α/2 = 0,9772. Si buscamos este valor de 0,9772 en la tabla de la distribución normal, obtenemos el valor de $Z_{\alpha/2}$ que toma un valor de 2. Además, nos dan el error máximo admisible (E), de 0,05 km. Con estos datos podemos calcular el número de bolígrafos necesario (n), según la siguiente fórmula:

$$E = Z_{0.9772} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow n = \left(Z_{0.9772} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 \rightarrow n = \left(2 \cdot \frac{0,5}{0,05}\right)^2 = \mathbf{400}\ bolígrafos$$

b) En este caso, nuestra distribución normal tendrá media conocida; por lo que la distribución normal será **N (2; 0.5).** También, nos piden la probabilidad de que 16 bolígrafos, escriban más de 30 km; o lo que es mismo que con un bolígrafo se pueda escribir 30/16 km (1, 875 km).

Por lo tanto, procedemos a calcular la probabilidad que nos piden.

$$P\ (X \geq 1,875) = P\left(Z \geq \frac{1,875-2}{0,5}\right) = P(Z \geq -1) = P\ (Z \leq 1) = \mathbf{0,8413}$$

B.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la matriz A dada por $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcule el valor del parámetro real m para que $A^2 - 5A = -4I$, siendo I la matriz identidad.
b) Para $m = 1$, indique si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Solución:

a) En este caso, deberemos calcular A^2-5·A e igualarlo a la -4I (siendo I la matriz identidad de 3x3).

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & m+1 & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -m-1 & 6 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos A2-5·A:

$$A^2 - 5A = \begin{pmatrix} 11 & m+1 & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -m-1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 5 & 10 \\ 0 & 5m & 0 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & m-4 & 0 \\ 0 & m^2-5m & 0 \\ 0 & -m+4 & -4 \end{pmatrix}$$

Igualamos A2-5·A a -4I

$$\begin{pmatrix} -4 & m-4 & 0 \\ 0 & m^2-5m & 0 \\ 0 & -m+4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Ahora igualando término a término, llegamos a 3 ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r} m-4=0 \\ m^2-5m=-4 \\ -m+4=0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{c} m=4 \\ m=4, \quad m=1 \\ m=4 \end{array}$$

Teniendo en cuenta los valores de m obtenidos, diremos que sólo el valor de **m = 4** es el valor correcto. Descartamos el valor de m=1, dado que sólo es solución de una de las ecuaciones.

b) Con m = 1, la matriz A quedará de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para calcular la inversa, lo primero que haremos es calcular será el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 0 + 0 - 2 - 0 - 0 = 4 \neq 0$$

Como det (A) no es nulo, la matriz A tendrá inversa.

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow Adj\,(A^T) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la inversa de A será:

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}}$$

A.2. (Calificación máxima: 2 puntos)

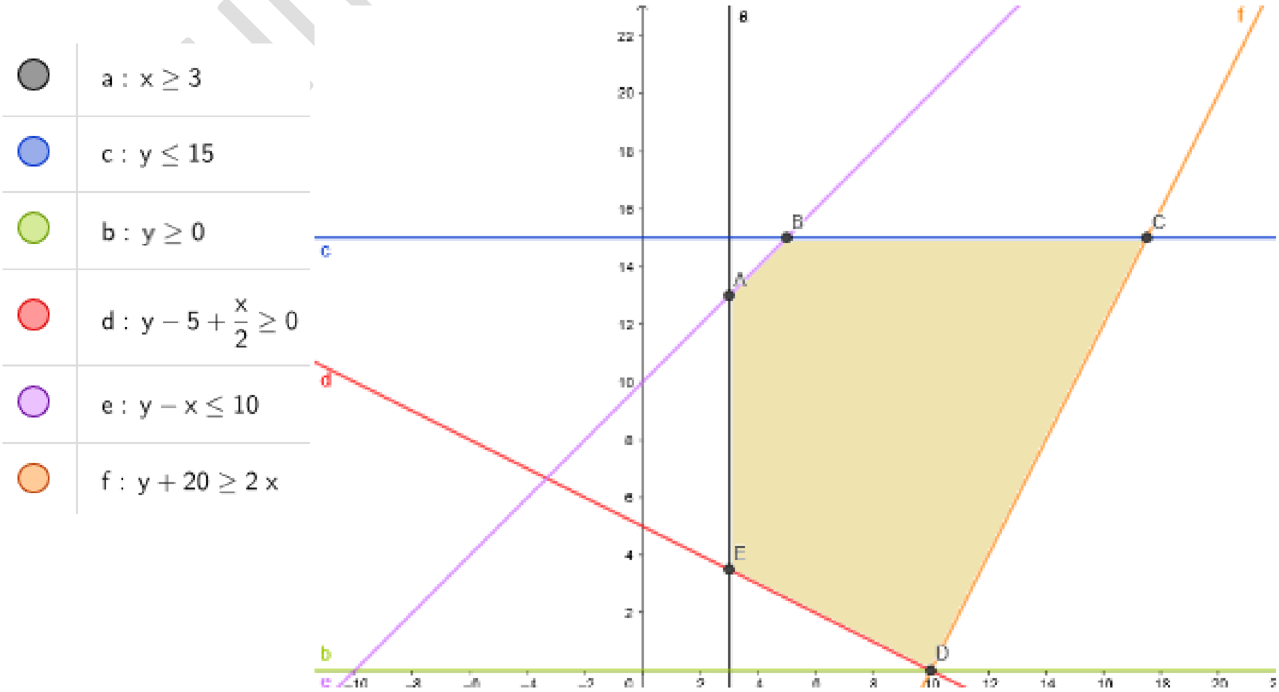
La región del plano S está definida por las siguientes expresiones:

$$x \geq 3, \quad 0 \leq y \leq 15, \qquad y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0, \qquad y - x \leq 10, \qquad y + 20 \geq 2x$$

a) Determine las coordenadas de sus vértices y represente en el plano la región S.
b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = x + y$ en esta región, indicando los puntos en los cuales se alcanzan estos valores.

Solución:

a) Deberemos representar todas las "restricciones" que aparecen en el enunciado, y así sacar la región que delimitan.



El área sombreada, es la región S. Esta región ha sido determinada teniendo en cuenta las restricciones. Los vértices se determinan planteando el sistema entre las rectas que se cortan.

$\left.\begin{matrix} x = 3 \\ y - x = 10 \end{matrix}\right\} \to$A (3, 13)

$\left.\begin{matrix} y = 15 \\ y - x = 10 \end{matrix}\right\} \to$B (5, 15)

$\left.\begin{matrix} y = 15 \\ y + 20 = 2x \end{matrix}\right\} \to$C (35/2, 15)

$\left.\begin{matrix} y = 0 \\ y + 20 = 2x \\ y - 5 + \frac{x}{2} = 0 \end{matrix}\right\} \to$D (10, 0)

$\left.\begin{matrix} x = 3 \\ y - 5 + \frac{x}{2} = 0 \end{matrix}\right\} \to$E (3, 7/2)

b) Ahora para poder optimizar la expresión que nos dan, lo que haremos será sustituir cada uno de los vértices en la expresión. El punto que nos dé el valor más bajo, será el que minimice; por el contrario, el que dé mayor valor, será el que maximice.

$f(3,13) = 3 + 13 = 16$
$f(5,15) = 5 + 15 = 20$
$f\left(\frac{35}{2}, 15\right) = \frac{35}{2} + 15 = \frac{65}{2} \to$C maximiza la expresión.
$f(10,0) = 10 + 0 = 10$
$f\left(3, \frac{7}{2}\right) = 3 + \frac{7}{2} = \frac{13}{2} \to$ E minimiza la expresión.

B.3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = 3(x + k)e^{\frac{-x}{2}}$$

a) Indique el dominio de la función y obtenga razonadamente el valor del parámetro real k para que la tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal. Determine también la ecuación de la recta tangente a la función en dicho punto.
b) Para $k = 1$, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) La función f(x), está compuesta por una exponencial y un polinomio de grado 1. Ambas funciones son continuas y están definidas para todo valor de x del conjunto de los reales. Por ello, diremos que $Dom\, f(x) = \{\mathbb{R}\}$

Dado que nos piden qué valor de k que hace que la recta tangente en x = 1 sea horizontal, es decir, que f´(1) = 0.

$$f'(x) = 3e^{-x/2} - \frac{3}{2}(x + k)e^{-\frac{x}{2}} = 3e^{-\frac{x}{2}}(1 - \frac{1}{2}(x + k))$$

Ahora, calculamos qué valor de k hace que f´(1) se anule.

$$f'(1) = 3e^{-1/2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot (1 + k)\right) = 0 \to 1 - \frac{1}{2} - \frac{k}{2} = 0 \to \boldsymbol{k = 1}$$

Para k = 1, la función sería: $f(x) = 3(x+1)e^{\frac{-x}{2}}$

La ecuación general de la recta tangente es la siguiente:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Siendo x_0 = 1, calcularemos f (1) ya que f´ (1) sabemos que su valor es 0.

$$f(1) = 3(1+1)e^{\frac{-1}{2}} = 6e^{-1/2} = \frac{6}{\sqrt{e}}$$

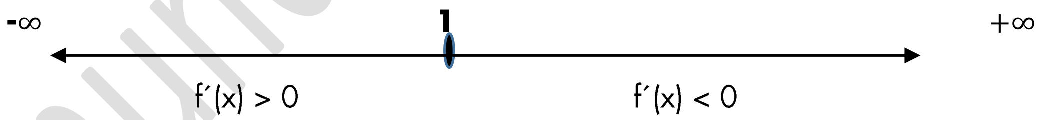
Sustituyendo, tenemos que la recta tangente en x=1 (y con k = 1) es:

$$\boldsymbol{y - \frac{6}{\sqrt{e}} = 0 \to y = \frac{6}{\sqrt{e}}}$$

b) Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, igualaremos f'(x) a cero para sacar los posibles máximos o mínimos que pueda presentar la función. Teniendo en cuenta que f'(x) ya está calculada del apartado anterior, estudiaremos la primera derivada para k = 1.

$$f'(x) = 3e^{-x/2} - \frac{3}{2}(x+1)e^{-\frac{x}{2}} = 3e^{-\frac{x}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}(x+1)\right) = 0 \to \left(1 - \frac{1}{2}(x+1)\right) = 0$$

$$\to 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0 \to \boldsymbol{x = 1}$$



Con lo obtenido en relación al signo de f´(x), podemos decir que:

- f(x) será **creciente en** $(-\infty, +\mathbf{1})$.
- f(x) será **decreciente en** $(+\mathbf{1}, +\infty)$.

Teniendo en cuenta esto en x =1, tendremos un máximo relativo, siendo el punto el $\boldsymbol{P\left(1, \frac{6}{\sqrt{e}}\right)}$. La ordenada del punto, se calcula sustituyendo en la función la x por 1.

B.4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Un estudio sobre la obsolescencia programada en una marca de electrodomésticos reveló que la probabilidad de que un microondas se estropee durante el periodo de garantía es 0,02. Esta probabilidad se eleva a 0,05 para sus hornos eléctricos y se sabe que estos sucesos independientes. Cuando el microondas se ha estropeado en el periodo de garantía, la marca amplía esta por dos años más. El 40 % de los clientes con garantía ampliada no conserva la factura de compra durante los dos años de ampliación.
a) Un cliente compra un horno y un microondas de esta marca. Obtenga la probabilidad de que se estropee al menos uno de ellos durante el periodo de garantía.
b) Un cliente ha comprado un microondas. Calcule la probabilidad de que se estropee durante el periodo de garantía y conserve la factura durante los dos años de ampliación.

Solución:

a) Primeramente, definimos los sucesos: M (se estropea el microondas), H (se estropea el horno) y F (el cliente conserva la factura).
Las probabilidades que nos proporciona el enunciado son:

$$P(M) = 0{,}02; P(H) = 0{,}05;\ P(\overline{F}/M) = 0{,}4$$

Dado que nos dicen que los **sucesos son independientes,** tenemos:

$$P(M \cap H) = P(M) \cdot P(H) = 0{,}02 \cdot 0{,}05 = 0{,}001$$

Calculamos $P(H \cup M)$.

$$P(H \cup M) = P(H) + P(M) - P(H \cap M) = 0{,}05 + 0{,}02 - 0{,}001 = \mathbf{0{,}069}$$

b) En este caso, nos pide calcular $P(F \cap M)$. Para ello, procedemos de la siguiente manera:

$$P(\overline{F}/M) = \frac{P(\overline{F} \cap M)}{P(M)} \rightarrow P(\overline{F} \cap M) = P(\overline{F}/M) \cdot P(M) = 0{,}4 \cdot 0{,}02 = 0{,}008$$

$$P(\overline{F} \cap M) = P(M) - P(M \cap F) \rightarrow P(M \cap F) = P(M) - P(\overline{F} \cap M) = 0{,}02 - 0{,}008$$
$$\boldsymbol{P(M \cap F) = 0{,}012}$$

B.5. (Calificación máxima: 2 puntos)

Determinado modelo de lavadora tiene un programa de lavado con un consumo de agua que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es de 7 litros.
a) En una muestra aleatoria simple de 10 lavados los consumos de en un lavado con este programa fueron los siguientes:

$$40 \quad 45 \quad 38 \quad 44 \quad 41 \quad 40 \quad 35 \quad 50 \quad 40 \quad 37$$

Construya el intervalo de confianza al 90 % para estimar el consumo medio de agua de este modelo de lavadoras con dicho programa de lavado.
b) A partir de una muestra de 64 lavadoras elegidas al azar, se obtuvo el intervalo de confianza para la media con una longitud de 5 litros. Obtenga el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

Solución:

a) El consumo de agua de este modelo de lavadoras, podemos aproximarlo a una distribución normal N(μ, 7).
Con los datos que nos proporciona el enunciado, podemos calcular la media muestral $(\overline{x})$

$$\overline{x} = \frac{40+45+38+44+41+40+35+50+40+37}{10} = 41$$

Nos piden determinar el intervalo de confianza. Nos dan el valor de α (0,90), Por lo tanto, α/2 será 0,95 y podremos determinar buscando en la tabla de la distribución normal e, valor de $Z_{0,95}$ el cual es 1,645 (el valor buscado está justo entre 1,64 y 1,65). Aplicando la fórmula del intervalo de confianza, tenemos:

$$\left(\overline{x} \pm Z_{0.95} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow \left(41 \pm 1.645 \cdot \frac{7}{\sqrt{10}}\right) \rightarrow (\mathbf{37.359; 44,641})$$

b) Nos dan el número de lavadoras (n). y la longitud del intervalo (2E= 5). Por ello, el error máximo admisible en este caso será de 2,5. Por lo tanto:

$$E = \boldsymbol{Z}_{\alpha/2} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} \rightarrow \mathbf{2,5} = \boldsymbol{Z}_{\alpha/2} \cdot \frac{\mathbf{7}}{\sqrt{\mathbf{64}}} \rightarrow Z_{\alpha/2} = 2{,}5 \cdot \frac{8}{7} = \mathbf{2,8571 \sim 2,86}$$

Ahora, calcularemos α/2.

$$P(Z < 2.86) = 0.9979 = 1 - \frac{\alpha}{2} \rightarrow \alpha = 0.0042 \rightarrow NC = 1 - \alpha = 0{,}9958 = \mathbf{99.58}\%$$

Siendo NC el nivel de confianza.