MATEMÁTICAS II
JULIO 2020
OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes de parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{l} x + ay + z = a+1 \\ -ax + y - z = 2a \\ -y + z = a \end{array}\right\}$$

Se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para a = 0

Solución:

a) $\left.\begin{array}{l} x + ay + z = a+1 \\ -ax + y - z = 2a \\ -y + z = a \end{array}\right\}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -a & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a+1 \\ -a & 1 & -1 & 2a \\ 0 & -1 & 1 & a \end{pmatrix}$

$|A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -a & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + a - (1 - a^2) = a^2 + a = 0 \rightarrow a = 0$ y $a = -1$

Para a = 0: $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Rag(A): $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{rag}(A) = 2$

Rag (B): $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{rag}(B) = 2$

Rag (A)=rag (B) = 2 ≠ número de incógnitas → Sistema compatible indeterminado

Para a = -1 $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Rag(A): $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{rag}(A) = 2$

Rag (B): $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{rag}(B) = 3$

Rag(A) ≠ rag (B) => Sistema Incompatible

<u>Para a ≠0 y a ≠-1</u> → rag(A) = rag(B) = número de incógnitas => Sistema compatible determinado

b) Para a = 0 el sistema es compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{l} x + z = 1 \\ y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + z = 1 \\ y - z = 0 \end{array}\right\} \quad z = \lambda \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1-\lambda \\ y = \lambda \end{array} \qquad \text{Solución } (1-\lambda, \lambda, \lambda)$$

<u>Ejercicio 2.</u> (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$, se pide:

a) (0,5 puntos) Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo [1, 10] en el que ambas funciones toman el mismo valor.

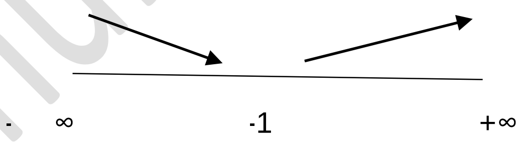
b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva y = f(x) con pendiente mínima

c) (1 punto) Calcular $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$

Solución:

a) Si f(x) = g(x) → f(x) – g(x) = 0. Llamamos $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 1$. Al ser h(x) una función continua y derivable en el intervalo dado en el enunciado; y puesto que la función tiene distinto signo en los extremos del mismo h(1) = −3 y h(10) = 1239; por el Teorema de Bolzano, podemos afirmar que existe un número real c ∈ [1, 10] tal que h (c) = 0 → f(c) = g(c)

b) La ecuación de la recta tangente responde a la expresión:
$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$
$m = f'(x) = 3x^2 + 6x \rightarrow m'(x) = 6x + 6 = 0 \rightarrow x = -1$



Tenemos la mínima pendiente en x =−1; la pendiente en ese punto será m(−1) = −3 y f(−1) = 1.
La recta tangente que nos queda es: y – 1 = −3 (x + 1) => y = −3x − 2

c) $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \int_1^2 \frac{x^3+3x^2-1}{6x}\,dx = \frac{1}{6}\int_1^2 \left(\frac{x^3}{x} + \frac{3x^2}{x} - \frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{6}\int_1^2 \left(x^2 + 3x - \frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{6}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - lnx\right)\Big]_1^2 = [\frac{1}{6}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{6}\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{6}Ln(x)\,]_1^2 = [\frac{x^3}{18} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{6}Ln(x)\,]_1^2 = (\frac{4}{9} + 1 - \frac{1}{6}Ln(2)) - (\frac{1}{18} + \frac{1}{4} - 0) = 1{,}023$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las rectas:

$$r: \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular la posición relativa de r y s

b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto P (2, -1, 5)

c) (1 punto) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s

Solución:

a) r: $x = y + 2 = \frac{z-1}{3}$

Pr (0, -2, 1) Ps (-1, -4, 0)

Vr (1,1,3) Vs (2, -1, 1)

$$\overrightarrow{PrPs} = (-1, -2, -1) \qquad \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan}$$

b) Como el plano y r son perpendiculares, el vector normal del plano y el vector directo de la recta son paralelos y por lo tanto iguales o proporcionales. La ecuación del plano responde a esta expresión: $x + y + 3z + D = 0$.
Sustituimos el punto en la ecuación del plano para obtener el término independiente:

$$(x-2) + (y+1) + 3(z-5) = 0 \rightarrow x + y + 3z - 16 = 0$$

c) $$\begin{vmatrix} x+1 & y+4 & z \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi \equiv 4x + 5y - 3z + 24 = 0$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30%. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40%, en el tercero 50% y en el cuarto 60%. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.

b) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.

c) (1 punto) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85% de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los diez hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

Solución:

a) $P = P(1) \cup P(\bar{1} \cap 2) \cup P(\bar{1} \cap \bar{2} \cap 3) = 0{,}3 + 0{,}7x0{,}4 + 0{,}7x0{,}6x0{,}5 = 0{,}79$

b) $P = P(\bar{1}) \cap P(\bar{2}) \cap P(\bar{3}) \cap P(\bar{4}) = 0{,}7x0{,}6x0{,}5x0{,}4 = 0{,}084$

c) Se trata de una distribución binomial de p = 0,85 y q = 0,15

$P(x=6) = \binom{10}{6} 0{,}85^6 * 0{,}15^4 = 0{,}04$

OPCIÓN B

Ejercicio B.1. (Calificación máxima: 2.5 puntos)
Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275,8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63,6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada un de los tres tipos de pescado anteriores.

Solución:

Llamamos:
X= precio del kilo de doradas, y= precio del kilo de lubinas, z= precio del kilo de rodaballo
Del enunciado obtenemos las siguientes ecuaciones cuyas unidades son toneladas y euros.

$$\begin{cases} 13740x + 23440y + 7400z = 275800000 \\ 7400z = 63600000 \\ x = 11 + y \end{cases}$$

De la segunda ecuación se obtiene: z= 8595€/tonelada.
Sustituyendo en la primera ecuación la segunda y la tercera:

$$13740(11 + y) + 23440y = 275800000 - 63600000 \rightarrow y = 5703{,}3€/tonelada$$

Sustituyendo el valor de y en la tercera ecuación se obtiene: x=5714,3€/tonelada
Para terminar, como piden el precio en kilos, pasamos las toneladas a kilogramos y se obtiene:

$$\begin{cases} x = 5{,}714\ €/Kg \\ y = 5{,}703\ €/Kg \\ z = 8{,}595\ €/\mathrm{Kg} \end{cases}$$

Ejercicio B.2. (Calificación máxima 2,5 puntos)
Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & si\ \ x \leq 1 \\ (x-1)^3 & si\ \ x > 1 \end{cases}$$

a) (0,5 puntos) Estudie su continuidad en [-4,4].
b) (1 punto) Analice su derivabilidad y crecimiento en [-4,4].
c) (1 punto) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ está definida, es continua y es derivable en x=1

Solución:

a) Al ser ambos trozos de la función funciones polinómicas, son continuas en todo su dominio, por tanto, habrá que estudiar la continuidad en x=1

$$\lim_{x\to 1-}(x-1)^2 = 0$$
$$\lim_{x\to 1+}(x-1)^3 = 0$$
$$f(1) = 0$$

Dado que los límites y la función en el punto tienen el mismo valor, la función es continua en x=1 y también en el intervalo [-4,4].

b) Para analizar la derivabilidad, obtenemos la derivada de la función:

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & si\ \ x \leq 1 \\ 3(x-1)^2 & si\ \ x > 1 \end{cases}$$

Para ver si es derivable, estudiamos la continuidad de la derivada. Al igual que antes, son ambas funciones polinómicas por lo que son continuas en todo su dominio. Habrá que estudiar la continuidad en x=1

$$\lim_{x\to 1^-} 2x - 2 = 0$$
$$\lim_{x\to 1+} 3(x-1)^2 = 0$$
$$f'(1) = 0$$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^\mp} f(x) = f(1)$ Dado que los límites y la función en el punto tienen el mismo valor, la función es derivable en x=1 y también en el intervalo [-4,4].

Para analizar el crecimiento:

Para valores de x<1: $f'(x) < 0$. Por tanto, decrece del [-4,1).

Para valores de x>1: $f'(x) > 0$. Por tanto, crece del (1,4].

c) $g(x) = \begin{cases} 2(x-1) & si\ \ x \leq 1 \\ 3(x-1)^2 & si\ \ x > 1 \end{cases}$ $\qquad g'(x) = \begin{cases} 2 & si\ \ x < 1 \\ 6(x-1) & si\ \ x > 1 \end{cases}$

Para estudiar la continuidad en x=1:

$$\lim_{x\to 1^-} 2x - 2 = 0$$
$$\lim_{x\to 1+} 3(x-1)^2 = 0$$
$$f(1) = 0$$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ Función continua en x=1.

Para estudiar la derivabilidad:

$$\lim_{x\to 1^-} g'(x) = 2$$
$$\lim_{x\to 1+} 6(x-1) = 0$$

$\lim_{x\to 1^-} g'(x) \neq \lim_{x\to 1^+} g'(x)$ La función g(x) no es derivable en x=1.

<u>Ejercicio B.3</u>. (Calificación máxima 2,5 puntos)

Dados los puntos P (-3,1,2) y Q (-1,0,1) y el plano π de ecuación $x + 2y - 3z = 4$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la proyección de Q sobre π.
b) (0,5 puntos) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P.
c) (1 punto) Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q.

Solución:

a) Primero creamos una recta perpendicular al plano que pase por el punto Q:

$$\vec{V_r} = \vec{V_\pi} = (1,2,-3)$$

$$r = \begin{cases} \gamma - 1 \\ 2\gamma \\ -3\gamma + 1 \end{cases}$$

La proyección de Q en el plano viene dada por el punto de corte entre la recta r y el plano π:

$$\gamma - 1 + 2(2\gamma) - 3(-3\gamma + 1) = 4 \rightarrow \gamma = \frac{4}{7}$$

Sustituyendo el valor de γ en la recta r, se obtiene el el punto Q' proyección de Q:

$$Q' = (-\frac{3}{7}, \frac{8}{7}, -\frac{5}{7})$$

b) Llamamos al nuevo plano α. Puesto que ambos planos son paralelos, tendrán el mismo vector. Creamos un plano con el vector de π que pase por el punto P:

$$\alpha \equiv (x+3) + 2(y-1) - 3(z-2) = 0$$

$$\alpha \equiv x + 2y - 3z + 7 = 0$$

c) Llamamos al nuevo plano α. Calculamos el vector formado por los puntos P y Q:

$$\overrightarrow{PQ} = (2,-1,-1)$$

Para calcular el vector del nuevo plano, hacemos el producto vectorial $\overrightarrow{PQ}x\vec{V_\pi}$:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k} = (1,1,1)$$

Ahora calculamos el plano α con el vector calculado y con cualquiera de los dos puntos (P o Q). Eligiendo el punto Q, obtenemos el plano:

$$\alpha \equiv (x+1) + y + (z-1) = 0 \rightarrow \alpha \equiv x + y + z = 0$$

<u>Ejercicio B.4</u>. (Calificación máxima 2,5 puntos)

Se consideran dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}25$, y $P\,(A \cap B) = 0{,}125$. Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

a) (0,5 puntos) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B. ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$?

b) (0,5 puntos) ¿Son A y B independientes?

c) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ (donde $\bar{A}$ denota el suceso complementario al suceso A).

d) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad $P(\bar{B}|A)$

Solución:

a) Si C es incompatible con A y con B, $P\big(C \cap (A \cup B)\big) = \emptyset$

b) Cuando dos sucesos son independientes se cumple que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Para comprobarlo: $0{,}125 = 0{,}5 \cdot 0{,}25$. Puesto que la igualdad se cumple, los sucesos A y B son independientes.

c) Hay dos formas de calcularlo:

Por un lado $P(\bar{A}) = 0{,}5\ y\ P(\bar{B}) = 0{,}75$

Por tanto $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}5 \cdot 0{,}75 = 0{,}375$

Por otro lado $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}625 = 0{,}375$

Calculamos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}25 - 0{,}125 = 0{,}625$

d) $P(\bar{B}|A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}75 \cdot 0{,}5}{0{,}5} = 0{,}75$