MATEMÁTICAS ASOCIADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CURSO 2015/2016

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} 3x + y - z = 8 \\ 2x \quad + az = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.
b) b) Resuélvase para a = 1.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & a & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$|A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + \mathrm{a} - 2 - (0 + 3\mathrm{a} + 2) = -2\mathrm{a} - 4 = 0 \rightarrow \mathrm{a} = -2$$

- <u>Para a ≠-2</u>

$|A|$≠0 → Rango de A = 3

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (0 + 3 + 16) - (0 + 9 + 4) = 6 \neq 0 \rightarrow \text{Rango de } \mathrm{A}^* = 3$$

Como Rango de A = Rango de A* = nº de incógnitas, el sistema es compatible determinado.

- <u>Para a = -2:</u>

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango de A} = 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 4 - 3 - (0 - 16 + 3) = 16 \neq 0 \rightarrow \text{Rango de } A^* = 3$$

Como Rango de A ≠ Rango de A^* , el sistema es incompatible.

b) Como a ≠-2 el sistema será compatible determinado, por lo que aplicamos la regla de Cramer:

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 1 - (0 + 3 + 2) = -6$$

$$|\Delta x| = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 3 + 2 - (0 + 8 + 3) = -12$$

$$|\Delta y| = \begin{vmatrix} 3 & 8 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 4 + 8 - (-3 + 16 + 6) = -6$$

$$|\Delta z| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 3 + 16 - (0 + 4 + 9) = 6$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-12}{-6} = \mathbf{2}$$

$$\boldsymbol{y} = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-6}{-6} = \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{z} = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{6}{-6} = -\mathbf{1}$$

Ejercicio 2. Sabiendo que la derivada de una función real de variable real *f* es

$$f'(x) = 3x^2 + 2x$$

a) Calcúlese la expresión de $f(x)$ sabiendo que su gráfica pasa por el punto (1, 4).
b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto (1, 4).

a)

$$f(x) = \int (3x^2 + 2x)dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + C = x^3 + x^2 + C$$

Como pasa por el punto (1,4)

$$f(1) = 4 \rightarrow 4 = 1^3 + 1^2 + C \rightarrow 4 = 2 + C \rightarrow C = 2$$

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 + x^2 + 2}$$

b) La ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(1) = 4$$

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 5$$

$$y - 4 = 5(x - 1)$$

$$\boldsymbol{y = 5x - 1}$$

Ejercicio 3. Sean las funciones reales de variable real

$$f(x) = x^2 - 6x \qquad g(x) = x - 10$$

a) Represéntense gráficamente las funciones *f* y *g*.
b) Calcúlese el área del recinto plano acotado por las gráficas de las funciones *f* y *g*.

$$f(x) = x^2 - 6x$$

Vértice: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$ V (3,-9)

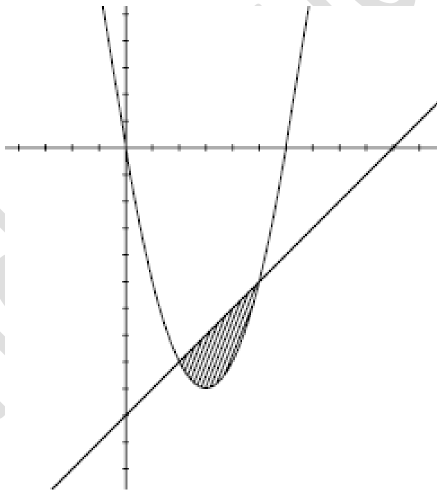
$y_v = 9 - 18 = -9$

Corte X: $y = 0 \to x^2 - 6x = 0 \to x = 0,\ x = 6$

P$_1$ (0,0); P$_2$ (6,0)

- $g(x) = x - 10$

x	y
0	-10
10	0



c) Puntos de corte entre $f(x)$ y $g(x)$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 - 6x \\ g(x) = x - 10 \end{array}\right\} \quad x^2 - 6x = x - 10 \to x^2 - 7x + 10 = 0 \to x = 5, x = 2$$

Los puntos de corte delimitan el área para la integral definida.

$$A = \int_2^5 [(x-10) - (x^2 - 6x)]dx = \int_2^5 (-x^2 + 7x - 10)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 10x\right]_2^5 =$$

$$= \left(-\frac{5^3}{3} + \frac{7\cdot 5^2}{2} - 10\cdot 5\right) - \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{7\cdot 2^2}{2} - 10\cdot 2\right) = -\frac{125}{3} + \frac{175}{2} - 50 + \frac{8}{3} - \frac{28}{2} + 20 = \mathbf{4{,}5u^2}$$

Ejercicio 4. En una bolsa hay cuatro bolas rojas y una verde. Se extraen de forma consecutiva y sin reemplazamiento dos bolas. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Las dos bolas sean del mismo color.

$P(2R) = P(1R \cap 2R) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{3}{5}$

b) La primera bola haya sido verde si la segunda bola extraída es roja.

$$\boldsymbol{P(V/R)} = \frac{P(V \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

Ejercicio 5. El tiempo de reacción ante un obstáculo imprevisto de los conductores de automóviles de un país, en milisegundos (ms), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica σ = 250 ms.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene un intervalo de confianza (701; 799), expresado en ms, para μ con un nivel del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

$N(\mu, \sigma) = N(\mu, 250)$

Intervalo de confianza $(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Para un nivel de confianza del 95% $(1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96)$

$$\begin{cases} \bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 701 \rightarrow \bar{x} - 1{,}96 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} = 701 \rightarrow \bar{x} = 701 + 1{,}96 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} \\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 799 \rightarrow \bar{x} + 1{,}96 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} = 799 \rightarrow \bar{x} = 799 - 1{,}96 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

$701+1{,}96 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} = 799-1{,}96 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} \rightarrow 1{,}96 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} + 1{,}96 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} = 799-701 \rightarrow \frac{2 \cdot 1{,}96 \cdot 250}{\sqrt{n}} = 98$

$980 = 98\sqrt{n} \rightarrow n = 100$

$\bar{x} = 799 - 1{,}96 \cdot \frac{250}{\sqrt{100}} = 799 - 49 = 750$

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 80 %.

Error máximo admisible $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$E = 1{,}285 \cdot \frac{250}{\sqrt{25}} = 64{,}25\ ms$