MATEMÁTICAS ASOCIADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CURSO 2015/2016

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} 3x + y - z = 8 \\ 2x \quad + az = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.
b) b) Resuélvase para a = 1.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & a & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$|A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + \mathrm{a} - 2 - (0 + 3\mathrm{a} + 2) = -2\mathrm{a} - 4 = 0 \rightarrow \mathrm{a} = -2$$

- <u>Para a ≠-2</u>

$|A|$≠0 → Rango de A = 3

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (0 + 3 + 16) - (0 + 9 + 4) = 6 \neq 0 \rightarrow \text{Rango de } \mathrm{A}^* = 3$$

Como Rango de A = Rango de A* = nº de incógnitas, el sistema es compatible determinado.

- <u>Para a = -2:</u>

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango de A} = 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 4 - 3 - (0 - 16 + 3) = 16 \neq 0 \rightarrow \text{Rango de } A^* = 3$$

Como Rango de A ≠ Rango de A^*, el sistema es incompatible.

b) Como a ≠-2 el sistema será compatible determinado, por lo que aplicamos la regla de Cramer:

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 1 - (0 + 3 + 2) = -6$$

$$|\Delta x| = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 3 + 2 - (0 + 8 + 3) = -12$$

$$|\Delta y| = \begin{vmatrix} 3 & 8 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 4 + 8 - (-3 + 16 + 6) = -6$$

$$|\Delta z| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 3 + 16 - (0 + 4 + 9) = 6$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-12}{-6} = \mathbf{2}$$

$$\boldsymbol{y} = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-6}{-6} = \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{z} = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{6}{-6} = -\mathbf{1}$$

Ejercicio 2. Sabiendo que la derivada de una función real de variable real *f* es

$$f'(x) = 3x^2 + 2x$$

a) Calcúlese la expresión de $f(x)$ sabiendo que su gráfica pasa por el punto (1, 4).
b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto (1, 4).

a)

$$f(x) = \int (3x^2 + 2x)dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + C = x^3 + x^2 + C$$

Como pasa por el punto (1,4)

$$f(1) = 4 \rightarrow 4 = 1^3 + 1^2 + C \rightarrow 4 = 2 + C \rightarrow C = 2$$

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 + x^2 + 2}$$

b) La ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(1) = 4$$

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 5$$

$$y - 4 = 5(x - 1)$$

$$\boldsymbol{y = 5x - 1}$$

Ejercicio 3. Sean las funciones reales de variable real

$$f(x) = x^2 - 6x \qquad g(x) = x - 10$$

a) Represéntense gráficamente las funciones *f* y *g*.
b) Calcúlese el área del recinto plano acotado por las gráficas de las funciones *f* y *g*.

$$f(x) = x^2 - 6x$$

Vértice: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$ V (3,-9)

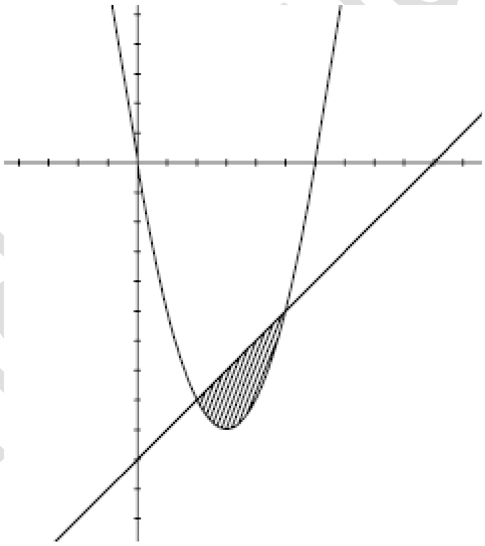
$y_v = 9 - 18 = -9$

Corte X: $y = 0 \rightarrow x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0, \ x = 6$

P1 (0,0); P2 (6,0)

- $g(x) = x - 10$

x	y
0	-10
10	0



c) Puntos de corte entre $f(x)$ y $g(x)$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 - 6x \\ g(x) = x - 10 \end{array}\right\} x^2 - 6x = x - 10 \rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \rightarrow x = 5, x = 2$$

Los puntos de corte delimitan el área para la integral definida.

$$A = \int_2^5 [(x-10) - (x^2 - 6x)]dx = \int_2^5 (-x^2 + 7x - 10)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 10x\right]_2^5 =$$

$$= \left(-\frac{5^3}{3} + \frac{7\cdot 5^2}{2} - 10\cdot 5\right) - \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{7\cdot 2^2}{2} - 10\cdot 2\right) = -\frac{125}{3} + \frac{175}{2} - 50 + \frac{8}{3} - \frac{28}{2} + 20 = \mathbf{4,5u^2}$$

Ejercicio 4. En una bolsa hay cuatro bolas rojas y una verde. Se extraen de forma consecutiva y sin reemplazamiento dos bolas. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Las dos bolas sean del mismo color.

$P(2R) = P(1R \cap 2R) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{3}{5}$

b) La primera bola haya sido verde si la segunda bola extraída es roja.

$$\boldsymbol{P(V/R)} = \frac{P(V \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

Ejercicio 5. El tiempo de reacción ante un obstáculo imprevisto de los conductores de automóviles de un país, en milisegundos (ms), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica σ = 250 ms.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene un intervalo de confianza (701; 799), expresado en ms, para μ con un nivel del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

$N(\mu, \sigma) = N(\mu, 250)$

Intervalo de confianza $(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Para un nivel de confianza del 95% $(1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96)$

$$\begin{cases} \bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 701 \rightarrow \bar{x} - 1{,}96 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} = 701 \rightarrow \bar{x} = 701 + 1{,}96 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} \\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 799 \rightarrow \bar{x} + 1{,}96 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} = 799 \rightarrow \bar{x} = 799 - 1{,}96 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

$$701 + 1{,}96 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} = 799 - 1{,}96 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} \rightarrow 1{,}96 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} + 1{,}96 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} = 799 - 701 \rightarrow \frac{2 \cdot 1{,}96 \cdot 250}{\sqrt{n}} = 98$$

$980 = 98\sqrt{n} \rightarrow n = 100$

$\bar{x} = 799 - 1{,}96 \cdot \frac{250}{\sqrt{100}} = 799 - 49 = 750$

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 80 %.

Error máximo admisible $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

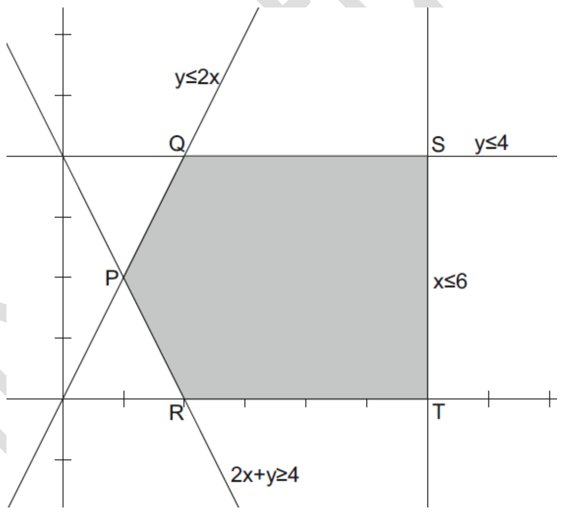
$E = 1{,}285 \cdot \frac{250}{\sqrt{25}} = 64{,}25\ ms$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Una fábrica de piensos para animales produce diariamente como mucho seis toneladas de pienso del tipo A y como máximo cuatro toneladas de pienso del tipo B. Además, la producción diaria de pienso del tipo B no puede superar el doble de la del tipo A y, por último, el doble de la fabricación de pienso del tipo A sumada con la del tipo B debe ser como poco cuatro toneladas diarias. Teniendo en cuenta que el coste de fabricación de una tonelada de pienso del tipo A es de 1000 euros y el de una tonelada del tipo B de 2000 euros, ¿cuál es la producción diaria para que la fábrica cumpla con sus obligaciones con un coste mínimo? Calcúlese dicho coste diario mínimo.

$$\left.\begin{array}{l} x \leq 6 \\ y \leq 4 \\ y \leq 2x \\ 2x + y \geq 4 \end{array}\right\}$$

$$z = 1000x + 2000y$$



$P(1,2)$ $Q(2,4)$ $R(2,0)$ $S(6,4)$ $T(6,0)$

$z(P) = 1000 \cdot 1 + 2000 \cdot 2 = 5000€$

$z(Q) = 1000 \cdot 2 + 2000 \cdot 4 = 10000€$

$z(R) = 1000 \cdot 2 + 2000 \cdot 0 = 2000€$

$z(S) = 1000 \cdot 6 + 2000 \cdot 4 = 14000€$

$z(T) = 1000 \cdot 6 + 2000 \cdot 0 = 6000€$

La producción diaria para que tenga un coste mínimo es 2 toneladas del tipo A y 0 del tipo B, siendo el coste mínimo diario de 2000€.

Ejercicio 2. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & k & 2 \end{pmatrix}$$

a) Estúdiese el rango de A según los valores del parámetro real k.
b) Calcúlese, si existe, la matriz inversa de A para k = 3.

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & k & 2 \end{vmatrix} = 12 + 0 - 4 - (0 + 4k + 0) = 8 - 4k \rightarrow |A| = 0 \rightarrow 8 - 4k = 0 \rightarrow k = 2$$

- <u>Para k = 2:</u>

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow \text{Rango de A} = 2$$

- <u>Para k ≠ 2:</u>

$|A| \neq 0 \rightarrow$ Rango de A = 3

b)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 0 - 4 - (0 + 12 + 0) = -4$$

$$(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A_{adj}{}^t) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A^{-1}}) = \frac{1}{|A|}(A_{adj}{}^t) = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-3/4} & \mathbf{2} & \mathbf{-3/2} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. Se considera la función real de variable real definida por:

$$\begin{array}{ll} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} & si\ x < 2 \\ 3x+m & \text{si x} \geq 2 \end{array}$$

a) Calcúlese el valor del parámetro real m para que la función f sea continua en x = 2.

b) Calcúlense $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

a) Para que la función f sea continua en x=2 → $f(2) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

$$f(2) = 3\cdot 2 + m = 6 + m$$

$$\lim_{x\to 2^+}(3x+m) = 6+m$$

$$\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}\right) = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2^-}\left(\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{(x-3)\cancel{(x-2)}}\right) = \lim_{x\to 2^-}\left(\frac{(x+2)}{(x-3)}\right) = \frac{4}{-1} = -4$$

Descomposición factorial $(x^2-5x+6) \to x = \frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 6}}{2} = \frac{5\pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) \to 6+m = -4 \to m = -10$$

b)

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty}(3x-2) = \infty$$

Ejercicio 4. Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A\ \cap\ B) = 0,3$; $P(A\ \cap\ \bar{B}) = 0,2$ y $P(B) = 0,7$. Calcúlese: (Nota: $\bar{S}$ denota el suceso complementario del suceso S).

$a)$ $P(A\ \cup\ B)$.

b) $P(B|\bar{A})$.

a) $P(A\ \cap\ \bar{B}) = P(\bar{B}\ \cap A) = P(A) - P(A\cap B) \to 0{,}2 = P(A) - 0{,}3 \to P(A) = 0{,}5$

$\boldsymbol{P(A\ \cup\ B)} = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0{,}5 + 0{,}7 - 0{,}3 = \mathbf{0,9}$

b) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)1 - 0{,}5 = 0{,}5$

$$\boldsymbol{P(B|\bar{A})} = \frac{P(B\cap\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A}\cap B)}{(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(A\cap B)}{(\bar{A})} = \frac{0{,}7-0{,}3}{0{,}5} = \mathbf{0,8}$$

Ejercicio 5. La duración de cierto componente electrónico, en horas (h), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 1000 h.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de esos componentes electrónicos de tamaño 81 y la media muestral de su duración ha sido $\bar{x}$ = 8000 h. Calcúlese un intervalo de confianza al 99 % para μ.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 7904 y 8296 horas para una muestra aleatoria simple de tamaño 100 si sabemos que μ = 8100 h?

a) $N(\mu, \sigma) = N(\mu, 1000)$

Intervalo de confianza $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Para un nivel de confianza del 99% $(1 - \alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 0{,}10 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}645)$

$$\left(8000\text{-}1{,}645 \cdot \frac{1000}{\sqrt{81}}, 8000\text{+}1{,}645 \cdot \frac{1000}{\sqrt{81}}\right) = (8000\text{-}182{,}78 , 8000\text{+}182{,}78)$$
$$= (7817{,}22 , 8182{,}78)$$

$$\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1000}{\sqrt{100}} = 100$$

b)

$$P(7904 \le x \le 8296) = P\left(\frac{7904 - 8100}{100} \le z \le \frac{8296 - 8100}{100}\right) = P(-1{,}96 \le z \le 1{,}96)$$

$$P(z \le 1{,}96) = 0{,}9452$$

$$P(z \le -1{,}96) = P(z \ge 1{,}96) = 1 - P(z \le 1{,}96) = 1 - 0{,}9452 = 0{,}0548$$

$$P(-1{,}96 \le z \le 1{,}96) = P(z \le 1{,}96) - P(z \le -1{,}96) = 0{,}9452 - 0{,}0548 = 0{,}8904$$