Opción B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \mathbf{x} & +\mathbf{2y} & +\mathbf{z} & =\mathbf{1} \\ \mathbf{x} & +\mathbf{2y} & +\mathbf{3z} & =\mathbf{0} \\ \mathbf{x} & +\mathbf{ay} & +\mathbf{2z} & =\mathbf{0} \end{cases}$$

a) Discútase para los diferentes valores del parámetro $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$.
b) Resuélvase para $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Solución:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 4 + 6 + a - 2 - 4 - 3a = 4 - 2a = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$a \neq 2 \Rightarrow r(A) = r(B) = n = 3 \Rightarrow \text{Sistema compatible determinado}$$

$\underline{a = 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r(A): \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$$

$$r(B): \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0 \Rightarrow r(B) = 3$$

$$a = 2 \Rightarrow r(A) = 2 \neq r(B) = 3 \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) $\underline{a = 0}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = 4$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow x = 1$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow y = 0{,}25$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow z = -0{,}5$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{-x+b}}{\mathbf{x-2}} & \mathbf{si\ x \leq -1,} \\ \dfrac{\mathbf{x^2+6x+5}}{\mathbf{x^2+4x+3}} & \mathbf{si\ x > -1.} \end{cases}$$

a) Determínese para qué valores del parámetro $\mathbf{b}$ la función $\mathbf{f(x)}$ es continua en $\mathbf{x = -1}$.
b) Calcúlense las asíntotas de $\mathbf{f(x)}$.

Solución:

a)

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} = \lim_{x \to -1^+} \frac{(x+1)(x+5)}{(x+1)(x+3)} = \lim_{x \to -1^+} \frac{(x+5)}{(x+3)} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{-x+b}{x-2} = \frac{1+b}{-3}$$

$$\frac{1+b}{-3} = 2 \Rightarrow b = -7$$

b)
No tiene asíntotas verticales ya que $\mathrm{Dom}\big(f(x)\big) = \mathbb{R}$

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} = 1 \Rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-x+b}{x-2} = -1 \Rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y = -1$$

No tiene asíntotas oblicuas ya que tiene asíntotas horizontales.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sabiendo que la derivada de una función real de variable real es:

$$\mathbf{f'(x) = 6x^2 + 4x - 2.}$$

a) Determínese la expresión de $\mathbf{f(x)}$ sabiendo que $\mathbf{f(0) = 5}$.
b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $\mathbf{f}$ así como sus máximos y mínimos locales, si los tuviese.

Solución:

a)

$$f(x) = \int f'(x) = \int 6x^2 + 4x - 2 = 2x^3 + 2x^2 - 2x + C$$
$$f(0) = C = 5 \Rightarrow f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x + 5$$

b)

$$6x^2 + 4x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} (-\infty, -1) & (-1, 1/3) & (1/3, -1) \\ \nearrow & \searrow & \nearrow \end{array}$$

Con la información de $f'(x)$ y sabiendo que la función es continua, ya que es un polinomio, presenta un máximo local en $x = -1$ y un mínimo local en $x = 1/3$.

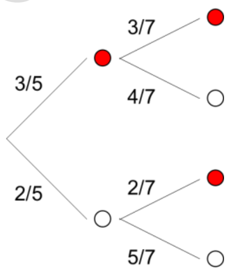
$$f(-1) = 7 \Rightarrow \text{Máximo local en } (-1, 7)$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{125}{27} \Rightarrow \text{Mínimo local en } \left(\frac{1}{3}, \frac{125}{27}\right)$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Tenemos dos urnas A y B. La urna A contiene 5 bolas: 3 rojas y 2 blancas. La urna B contiene 6 bolas: 2 rojas y 4 blancas. Se extrae una bola al azar de la urna A y se deposita en la urna B. Seguidamente se extrae una bola al azar de la urna B. Calcúlese la probabilidad de que:

a) La segunda bola extraída sea roja.
b) Las dos bolas extraídas sean blancas

Solución:



a)

$$P(R') = P(R' \cap R) + P(R' \cap B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{13}{35} = 0{,}3714$$

b)

$$P(B \cap B') = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{7} = 0{,}2857$$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El peso por unidad, en gramos, de la gamba roja de Palamós, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media $\boldsymbol{\mu}$ desconocida y desviación típica $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{5}$ gramos.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de $\mathbf{25}$ gambas y la media de sus pesos ha sido $\mathbf{x} = \mathbf{70}$ gramos. Calcúlese un intervalo de confianza al $\mathbf{95}\%$ para $\boldsymbol{\mu}$.

b) Si sabemos que $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{70}$ gramos, y se consideran los pesos de las $\mathbf{12}$ gambas de una caja como una muestra aleatoria simple, calcúlese la probabilidad de que el peso total de esas $\mathbf{12}$ gambas sea mayor o igual que $\mathbf{855}$ gramos.

Solución:

$$X \equiv N(\mu, 5)$$

a)

$$C = 95\% \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}} = 1{,}96$$

$$\text{Intervalo: } (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (68{,}04; 71{,}96)$$

b)

$$X \equiv N(70, 5) \Rightarrow X' \equiv N\left(70 \cdot 12, \frac{5 \cdot 12}{\sqrt{12}}\right) = N(840; 17{,}32)$$

$$P(X' \geq 855) = P\left(Z \geq \frac{855 - 840}{17{,}32}\right) = P(Z \geq 0{,}87) = 1 - P(Z < 0{,}87) = 1 - 0{,}8078$$
$$= 0{,}1922$$

La probabilidad es 19,22%.