MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
CONVOCATORIA ORDINARIA JUNIO 2017
OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Considérense las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -k \\ 1 & -2 & 1 \\ k & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Se pide:
a) Discútase para qué valores del parámetro real k la matriz A tiene matriz inversa.
b) Determínese para k = 0 la matriz X que verifica la ecuación AX = B.

Solución:

a) Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero, por ello calculamos el determinante de A y lo igualamos a 0:
$|A| = (2 + 2k - 2k) - (2k^2 + 2 - 2) = 2 - 2k^2$
$|A| = 0 \rightarrow 2 - 2k^2 = 0 \rightarrow k = \pm 1 \rightarrow$ La matriz tiene inversa para $k \neq \pm 1$.

b) $AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$
La inversa de una matriz viene dada por la expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj}(\ A^t)$$

Para k = 0: |A| = 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & -14 \end{pmatrix}$$

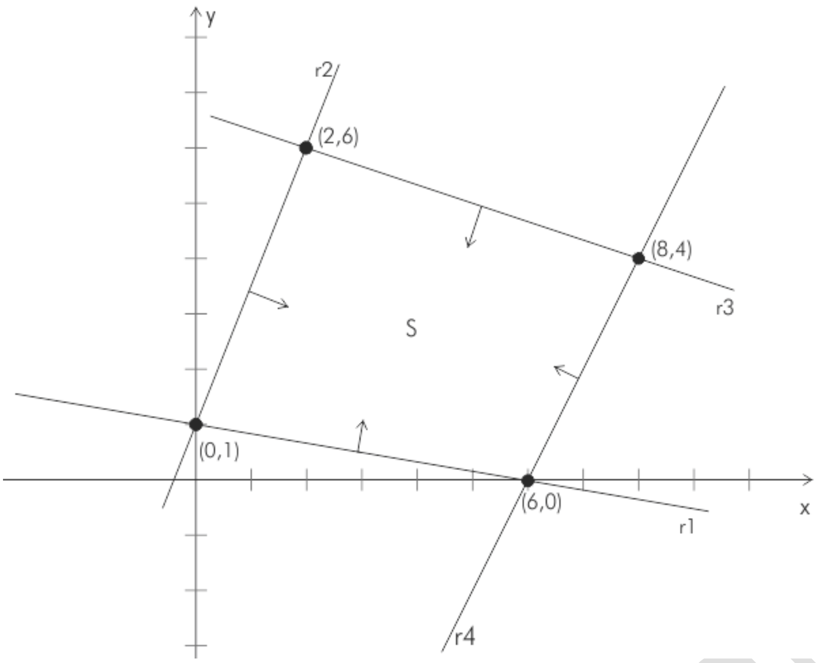
Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Considérese la región del plano S determinada por:

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 6y \geq 6;\ 5x - 2y \geq -2;\ x + 3y \leq 20;\ 2x - y \leq 12\}.$$

a) Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
b) Determínense los puntos en los que la función f(x,y) = 4x − 3y alcanza sus valores máximo y mínimo en S, indicando el valor de f(x,y) en dichos puntos.

Solución:

a)



Los vértices son los siguientes:
Corte de la recta x + 6y = 6 y la recta 2x − y = 1 2 ⟶ Punto (6,0)
Corte de la recta x + 3y = 20 y la recta 2x − y = 1 2 ⟶ Punto (8,4)
Corte de la recta 5x − 2y = −2 y la recta x + 3y = 20 ⟶ Punto (2,6)
Corte de la recta x + 6y = 6 y la recta 5x − 2y = −2 ⟶ Punto (0,1)

b) Para calcular el mínimo y el máximo evaluamos la función f(x,y) = 4x - 3y en los vértices de la región S:

f(6,0) = 24; f(8,4) = 20; f(2,6) = −10; f(0,1) = −3.
Por tanto, la función toma el máximo en el punto (6,0) siendo su valor 24 y toma el mínimo en el punto (2,6) siendo su valor −10.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
a) Determínese el valor de la derivada en el punto de abscisa x = 0 de la función

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x}$$

b) Estúdiese las asíntotas de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$$

Solución:

$$\text{a) } f'(x) = \frac{e^x(1+x) - e^x}{(1+x)^2} \cdot \frac{xe^x}{(1+x)^2} \rightarrow f'(0) == \frac{0e^0}{(1+0)^2} = 0$$

b) Tiene asíntotas verticales en x = ± 1 ya que son los valores de x donde se anula el denominador. Veamos los límites laterales:

$$x = 1 \rightarrow \lim_{x \to 1^+} \frac{x^3}{1 - x^2} = -\infty; \lim_{x \to 1^-} \frac{x^3}{1 - x^2} = +\infty$$

$$x = -1 \rightarrow \lim_{x \to -1^+} \frac{x^3}{1 - x^2} = -\infty; \quad \lim_{x \to -1^-} \frac{x^3}{1 - x^2} = +\infty$$

No tiene asíntotas horizontales ya que:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{1 - x^2} = \infty$$

Asíntotas oblicuas: y = mx + n

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x(1 - x^2)} = -1$$

$$n = \lim_{x \to \infty} f(x) - mx = \lim_{x \to \infty} f(x) + x = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{1 - x^2} = 0$$

Luego la asíntota oblicua es: y = −x.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Una empresa de reparto de paquetería clasifica sus furgonetas en función de su antigüedad. El 25 % de sus furgonetas tiene menos de dos años de antigüedad, el 40 % tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y el resto tiene una antigüedad superior a cuatro años. La probabilidad de que una furgoneta se estropee es 0,01 si tiene una antigüedad inferior a dos años; 0,05 si tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y 0,12 si tiene una antigüedad superior a cuatro años. Se escoge una furgoneta al azar de esta empresa. Calcúlese la probabilidad de que la furgoneta escogida:
a) Se estropee.
b) Tenga una antigüedad superior a cuatro años sabiendo que no se ha estropeado.

Solución:

Definimos los siguientes sucesos:
E: se estropee la furgoneta
$\overline{E}$: no se estropee la furgoneta
A: furgoneta con antigüedad menor a dos años
B: furgoneta con antigüedad entre dos y cuatro años
C: furgoneta con antigüedad mayor a cuatro años

A partir del enunciado tenemos las siguientes probabilidades:
P(A) = 0,25; P(B) = 0,4; P(C) = 0,35
P(E/A) = 0,01; P(E/B) = 0,05; P(E/C) = 0,12.
P($\overline{E}$/A) = 0,99; P($\overline{E}$/B) = 0,95; P($\overline{E}$/C) = 0,88.

a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total:
P(E) = P(E/A)P(A) + P(E/B)P(B) + P(E/C)P(C) = 0,01·0,25 + 0,05·0,4 + 0,12·0,35 = 0,0645.
b) Tenemos que aplicar el teorema de Bayes:

mundoestudiante métodoBarbeito

$$P(C/\overline{E}) = \frac{P(\overline{E}/C)\cdot P(C)}{P(\overline{E})}$$

Calculamos primero $P(\overline{E}) = P(\overline{E}/A)P(A) + P(\overline{E}/B)P(B) + P(\overline{E}/C)P(C) = 0{,}99\cdot 0.25 + 0{,}95\cdot 0{,}4 + 0{,}88\cdot 0{,}35 = 0{,}9355$.

Por tanto:

$$P(C/\overline{E}) = \frac{0{,}88\cdot 0{,}35}{0{,}9355} = 0{,}329$$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El peso en canal, en kilogramos (kg), de una raza de corderos a las seis semanas de su nacimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media µ y desviación típica igual a 0,9 kg.

a) Se tomó una muestra aleatoria simple de 324 corderos y el peso medio observado fue x =7,8 kg. Obténgase un intervalo de confianza con un nivel del 99,2 % para µ.

b) Determínese el tamaño mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple de la variable para que el correspondiente intervalo de confianza para µ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 0,2 kg.

Solución:

a) Tenemos una distribución N (µ ; 0,9). El intervalo de confianza viene dado por la expresión:

$$I = \left(\overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Como nos dan un nivel de confianza de 99,2 %, la probabilidad que deja a la izquierda $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ es 99,6 y utilizando la tabla de la distribución normal, obtenemos que $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}65$.

El intervalo queda:

$$I = \left(7{,}8 \pm \frac{0{,}9}{\sqrt{324}} 2{,}65\right) = (7{,}6675\,, 7{,}9325)$$

b) A partir del nivel de confianza al 95 % obtenemos que $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$.

Si la amplitud ha de ser a lo sumo 0,2, entonces el error tiene que ser 0,1, es decir:

$$0{,}1 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}} \rightarrow 0{,}1 = \frac{0{,}9}{\sqrt{n}} 1{,}96 \rightarrow n = 311{,}1696 \approx 312 \text{ corderos.}$$