mundoestudiante
métodoBarbeito

MATEMÁTICAS II
CONVOCATORIA ORDINARIA JUNIO 2016/2017
OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 3 puntos)
Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + ay + z = a \\ x - 4y + (a+1)z = 1 \\ 4y - az = 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo en función de los valores del parámetro real *a*.
b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para a=1.
c) (0.5 puntos) Resolver el sistema para a=2.

Solución:

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & -4 & a+1 \\ 0 & 4 & -a \end{pmatrix}$ $\quad$ $B=\begin{pmatrix} 2 & a & 1 & a \\ 1 & -4 & a+1 & 1 \\ 0 & 4 & -a & 0 \end{pmatrix}$

$$|A| = 0 \to \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & -4 & a+1 \\ 0 & 4 & -a \end{vmatrix} = 8a + 4 - 8a - 8 + a^2 = a^2 - 4 = 0 \to a = \pm 2$$

- Si a ≠ ±2. Rg(A)=Rg(B)= 3, ya que el determinante asociado a la matriz A no se anula para esos valores y en la matriz B hay al menos un menor de orden 3 que es distinto de cero. Por ello el sistema será SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (S.C.D.)

- Si a = 2.

$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Rg(A): $|A| = 0$ → El rango no será 3 sino que será menor.

$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$= -8-2=-10≠0→ Rg(A)=2

Para estudiar el rango de la matriz B, tenemos que probar con todos los posibles determinantes de orden 3 que se pueden hacer. Para que el rango de la matriz B sea 3, uno de los determinantes (al menos) debe ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 8 + 0 - 0 - 8 - 0 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0+16+4-24+4-0=0$$

$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$ → Por ello, el rango de B no será 3 sino que será menor.

Probamos con determinantes de orden 2 que se puedan formar con los elementos de la matriz B.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -8-2=-10 \neq 0 \rightarrow Rg(B)=2$$

Como Rg(A)=Rg(B)< nº incognitas (2=2<3) el sistema será SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (S.C.I.)

- Si a = -2. Procederemos de igual forma que en el caso anterior cuando a=2.

A= $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Rg(A): $|A|=0$ → El rango de A no será 3, será menor de 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -8+2=-6 \neq 0 \rightarrow Rg(A)=2$$

Rg(B):

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0-8+8-0-8-0=-16 \neq 0 \rightarrow Rg(B)=3$$

Como Rg(A)≠Rg(B)→ El sistema será SISTEMA INCOMPATIBLE y no tendrá solución.

b) $\left.\begin{array}{l} 2x+y+z=1 \\ x-4y+2z=1 \\ 4y-z=0 \end{array}\right\}$

Como ya sabemos del apartado anterior, para valores de *a* distintos de 2 y de -2 el sistema será compatible determinado (tiene una única solución). Lo resolveremos aplicando la regla de Cramer.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 8+4+0-0-16+1=-3$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 4+4+0-0-8+1=1 \rightarrow x=\frac{\Delta x}{\Delta}=-\frac{1}{3}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2+0+0-0-0+1=-1 \rightarrow y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{1}{3}$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 4 + 0 - 0 - 8 + 0 = -4 \rightarrow z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{4}{3}$$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x+2y+z=2 \\ x-4y+3z=1 \\ 4y-2z=0 \end{array}\right\}$

Como ya hemos visto, para ese valor del parámetro *a* el sistema será compatible ineterminado (tendrá infinitas soluciones).

Para a=2, el rango de A es 2. Por lo que aplicando la siguiente "fórmula" podemos saber cuántas indeterminaciones tendrán las soluciones.

Nº incognitas - Rg(A) = nº indeterminaciones→ 3-2=1

Esto quiere decir que debo utilizar dos ecuaciones y pasar la misma incógnita al otro miembro para resolver el sistema.

$\left.\begin{array}{l} 2x+2y = 2 - z \\ x-4y = 1 - 3z \end{array}\right\}$ Resolviendo por reducción obtenemos: x=1 – t ; y = -t/2 ; z = t

<u>Ejercicio 2.</u> (Calificación máxima: 3 puntos)

Dados los puntos P(1,-2,1), Q(-4, 0,1), R(-3, 1,2), S(0, -3, 0), se pide:

a) (1 punto) Halla la ecuación del plano que contiene a P, Q y R.
b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de la recta *r*, que pasa por los puntos P y Q, y la recta *s*, que pasa por R y S.
c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R.

Solución:

a) Como queremos determinar un plano que pase por esos tres puntos, esos 3 puntos deben ser coplanarios; es decir, el producto formando por esos puntos es igual a cero. Para ello planteamos con ayuda de un *punto genérico* A(x,y,z); tres vectores. Haciendo el producto mixto de esos 3 vectores e imponiendo que sea igual a cero, obtenemos la ecuación del plano.

$\overrightarrow{PA} = (x-1, y+2, z-1)$;$\overrightarrow{PQ} = (-5,2,0)$; $\overrightarrow{PR} = (-4,3,1)$

$$\alpha \equiv \det\left(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ -4 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow (x-1)(-2) - (y+2)(5) + (z-1)(7) = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow \alpha \equiv 2x + 5y - 7z + 15 = 0$$

b) En este caso, planteo la ecuación de ambas rectas; determinando el vector a cada par de puntos y empleando uno de los puntos en cada caso.

$$r \equiv \frac{x-1}{-5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{0}$$

$$s \equiv \frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-2}{-2}$$

Como podemos ver, los vectores de ambas rectas no son iguales ni proporcionales; por ello las rectas no son ni coincidentes ni paralelas. Las únicas posibilidades son que sean secantes o se crucen. Para discernir cuál de las dos posibilidades es, planteamos el producto mixto con los dos vectores directores de la cada recta y con el vector formado por dos puntos (uno de cada recta). Si el producto mixto es igual a 0; las rectas serán secantes y si es un valor distinto de 0, las rectas se cruzan.

$$\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{RS}) = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 16 + 20 + 0 - 6 + 0 - 30 = 0$$

Como el determinante es igual a cero, las rectas son secantes. Para determinar el punto de corte de ambas rectas, pasamos las rectas a paramétricas e igualamos las incógnitas.

$$r \equiv \begin{cases} x = -5t + 1 \\ y = 2t - 2 \\ z = 1 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 3t - 3 \\ y = -4t + 1 \\ z = -2t + 2 \end{cases}$$

Igualando la x de ambas rectas, la y, la z; obtenemos el mismo valor de t que en este caso es ½.

El punto de corte (A), será (-3/2, -1,1)

c) Para determinar el área comprendida por los puntos P, Q y R; aplicamos la siguiente fórmula:

$$A = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ}\ X\ \overrightarrow{PR}\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}|2\,\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - 7\vec{k}| = \frac{\sqrt{78}}{2}u^2$$

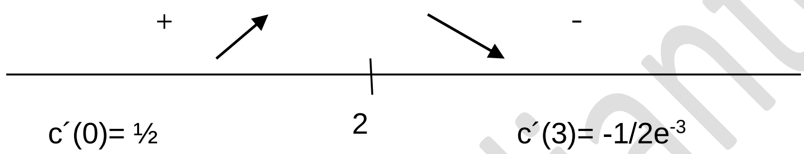
Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se administra una medicina a un enfermo y *t* horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t) = te^{-t/2}$ miligramos por litro. Determine el valor máximo de c(t) e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

Solución:

Para determinar la concentración máxima, lo que haremos será estudiar la primera de la función. Al igualar la primera derivada a cero, obtenemos los máximos y/o mínimos de la función. Seguidamente, estudiando el signo de la primera derivada podremos determinar si hay máximos y/o mínimo. También se puede comprobar si es máximo o mínimo sustituyendo el valor que anula la primera derivada en la segunda derivada; si el valor es positivo será un mínimo y si es negativo será un máximo.

$$c´(t) = e^{-t/2} - \frac{t}{2}e^{-t/2} = \left(1 - \frac{t}{2}\right)e^{-t/2}; c´(t) = 0 \rightarrow \left(1 - \frac{t}{2}\right)e^{-t/2} = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow \left(1 - \frac{t}{2}\right) = 0 \rightarrow t = 2\ (posible\ máximo\ o\ mínimo)$$



Como vemos la función crece desde $(-\infty, 2)$ y decrece desde $(2, +\infty)$. Por ello, la función presenta un máximo en t=2. Las coordenadas del máximo serán (2, 0.736)

Como vemos la función crece hasta un valor máximo localizado en t=2 y después decrece. Por ello la función no pasará de 1 mg/ml. Por lo tanto el paciente no correrá ningún riesgo; ya que no hay tiempos negativos el dominio se considera de $[0, +\infty)$. Por todo ello aseguramos que el paciente no correrá riesgo alguno.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Dada la función $f(x) = \frac{x^2+x+6}{x-2}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Determina su dominio y asíntotas verticales.
b) (0.5 puntos) Calcular $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.
c) (1 punto) Calcular $\int_3^5 f(x)dx$.

Solución:

a) Para estudiar el dominio de la función, es importante fijarse en el tipo de función que tenemos. En el caso que nos concierne, tenemos una función racional y por el dominio serán todos los números reales exceptuando los números que anulan el denominador. Por lo tanto el dominio de esta función será $(-\infty, 2)U(2, +\infty)$

Para el estudio de las asíntotas verticales lo que haremos será estudiar los límites laterales del valor o valores que anulan el denominador; en este caso estudiaremos los límites laterales de 2:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+x+6}{x-2} = -\infty \\ \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+x+6}{x-2} = +\infty \end{array}\right\}$$

Dados los valores que toma estos dos límites, podemos concluir que la función presenta una asíntota vertical en x=2

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+6}{x^2-2x} = \frac{\infty}{\infty}\,(aplico\ L\acute{}H\hat{o}pital) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{2x-2} = \frac{\infty}{\infty}(aplico\ L\acute{}H\hat{o}pital) = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{2} = 1$

c) Para hacer la integral, en primer lugar es necesario fijarse en que tenemos dos polinomios y que el polinomio del numerador es de mayor grado que el del denominador. Por lo tanto, tenemos que hacer la división primero y después procederemos a integrar.

$$\int_3^5 f(x)dx = \int_3^5 \frac{x^2+x+6}{x-2}dx$$
$$= \int_3^5 \left[x+3+\frac{12}{x-2}\right]dx = [\frac{x^2}{2}+3x+\ln(x-2)]_3^5$$
$$= \left(\frac{25}{2}+15+12\ln 3\right) - \left(\frac{9}{2}+9+12\ln 1\right) = 14+12\ln 3 = 27.18\,u^2$$