MATEMÁTICAS CCSS II
JUNIO 2018
OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran las matrices A=$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ y B=$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$

a) (1 puntos) Compruébese que B es la matriz inversa de A.
b) (1 puntos) Calcúlese la matriz X tal que A·X=B

Solución:

a) Si B es la matriz inversa de A, entonces A·B=B·A=I.

A·B=$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

B·A=$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Queda demostrado que B en la matriz inversa de A

b) A·X=B → A^{-1}·A·X= A^{-1}·B → I·X= A^{-1}·B → X= A^{-1}·B → X= B·B→ X= B^2

X=$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -48 & 17 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2.(Calificación máxima: 2 puntos)

Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \leq 50, \qquad 2x + y \leq 80, \qquad x \geq 0, \qquad y \geq 0$$

a) (1 punto) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
b) (1 punto) Obténgase el valor máximo de la función f(x,y)=5x + 4y en la región S, indicando el punto en el cual se alcanza dicho valor máximo.

Solución:

a) El recinto es el siguiente:

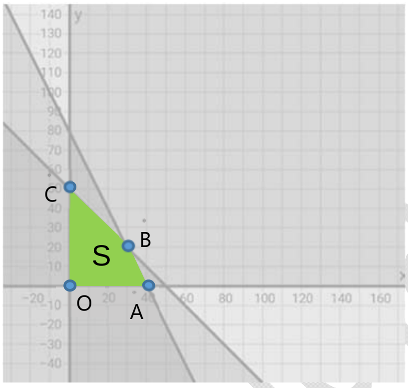
$$S = \begin{cases} x + y \leq 50 \\ 2x + y \leq 80 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = 50 \rightarrow C(0{,}50)$$

$$\begin{cases} 2x + y = 80 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 40 \rightarrow A(40{,}0)$$

$$\begin{cases} 2x + y = 80 \\ x + y = 50 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 80 \\ -x - y = -50 \end{cases} x = 30 \rightarrow y = 20 \rightarrow B(30{,}20)$$

Los vértices a estudiar son: O (0,0), A(40,0), B(30,20), C(0,50)



b) Para calcular el máximo evaluamos la función f(x,y)= 5x + 4y en los vértices de la región S:
f(0,0) = 0 ; f(40,0) = 200; f(30,20) = 230; f(0,50) = 200.
Por tanto, la función toma el máximo en el punto (30,20) siendo su valor 230.

<u>Ejercicio 3.</u> (Calificación máxima: 2 puntos)

Dados la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & si\ x \leq 2 \\ \\ \dfrac{3x^2 - 2x}{x+2} & si\ x > 2 \end{cases}$$

a) (1 punto) Estúdiese si f(x) es continua en x=2
b) (1 punto) Calcúlese la función derivada de f(x) para $x < 2$.

Solución:

a) f(x) es continua en x=2 si los limites laterales en ese punto coinciden y son iguales al valor de la función en ese punto:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{3x^2 - 2x}{x+2} = \frac{8}{4} = 2$$

mundoestudiante

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x+2}{x-1} = \frac{4}{1} = 4$$

Como el $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$ la función es discontinua en x=2

b) Al ser x<2 hay que derivar f(x)=$\frac{x+2}{x-1}$

$$f(x)' = \frac{1\cdot(x-1) - 1\cdot(x+2)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

En una agencia de viajes se ha observado que el 75 % de los clientes acude buscando un billete de transporte, el 80 % buscando una reserva de hotel. Se ha observado además que el 65 % busca las dos cosas. Elegido un cliente de dicha agencia al azar, calcúlese la probabilidad de que:

a) (1.25 puntos) Acuda buscando un billete de transporte o una reserva de hotel.
b) (1.25 puntos) Sabiendo que busca una reserva de hotel, también busque un billete de transporte.

Solución:

a) Los sucesos que tenemos son:

$$A \to buscar\ un\ billete\ de\ transporte.$$
$$B \to buscar\ una\ reserva\ de\ hotel.$$

$$P(A\cup B) = P(RA) + P(B) - P(A\cap B) = 0.75 + 0.8 - 0.65 = 0.9$$

b) En este caso, lo que está pidiendo el ejercicio es la probabilidad de que busque una reserva de hotel y también un billete de transporte:

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.65}{0.8} = 0.8125$$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

La empresa Dulce.SA produce sobres de azúcar cuyo peso en gramos se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal con media μ gramos y desviación típica σ = 0.5 gramos.

a) (1 punto) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 0.25 gramos con un nivel de confianza del 95 %.

mundoestudiante

b) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 25 sobres, la media muestral X, pese más de 12.25 gramos, sabiendo que μ = 12 gramos.

Solución:

a) E=0.25, $z_{\alpha/2}$=1.96

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.25 = 1.96\frac{0.5}{\sqrt{n}} \rightarrow n \geq \left(\frac{1.96 \cdot 0.5}{0.25}\right)^2 = 15.37 \rightarrow \mathrm{n} = 16$$

b) n=25, μ=12

$$\bar{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(12\,, 0.1)$$

$$P(\bar{X} \geq 12.25) = P\left(Z \geq \frac{12.25 - 12}{0.1}\right) = P(Z \geq 2.5)1 - (Z \leq 2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

mundoestudiante