mundoestudiante
métodoBarbeito

MATEMATICAS CCSS II
JUNIO 2018
OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+ay+z=1 \\ ax+y+(a-1)z=a \\ x+y+z=a+1 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.
b) Resuélvase para a = 3.

Solución:

a) Las matrices A y B son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & a-1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & a & 1 & 1\\ a & 1 & a-1 & a\\ 1 & 1 & 1 & a+1\end{pmatrix}$$

$$|A|=1+a(a-1)+a-[1+a^2+(a-1)]=1+a^2-a+a-1-a^2-a+1=$$
$$=1-a\to 1-a=0\to a=1$$

- Si $a\neq 1$ rango (A)=rango(B)= 3 → SCD

- Si a=1

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\ (C1=C2)\to\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0\to Rango\ A=2$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=1+1-1-2\neq 0\to RangoB=3$$

Rango(A)≠rango(B) → Sistema incompatible

b) Si a=3 → SCD, por Cramer:

$$|A|=1\text{-}a=1\text{-}3=-2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{13}{-2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{3}{-2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{-2} = 12$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$

a) Calcúlense el dominio y las asíntotas de f(x).
b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) Calculamos su dominio:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$

$$Domf = \mathbb{R} - \{x+1=0\} \rightarrow (x+1)^2 = 0 \rightarrow x+1=0 \rightarrow x=-1$$

$$Domf = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Calculamos sus asíntotas:
Asíntota Horizontal

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \pm\infty \quad NO\ TIENE$$

Asíntota Vertical

$$x = -1 \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = -\infty \end{cases}$$

Asíntota Oblicua

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3+2x^2+x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x+1)^2}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3-2x^2-x}{(x+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3-2x^2-x}{x^2+2x+1}=-2$$

La asíntota oblicua será: y = x -2

b) cálculo de los máximos y mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x)=\frac{2x^4+4x^3+3x^2}{(x+1)^4}\Longrightarrow 2x^4+4x^3+3x^2=0\to\ x^2(2x^2+4x+3)=0\to x=0$$

	(-∞,-1)	(-1,0)	(0,+∞)
F'(x)	+	-	+
	Creciente	Decreciente	Creciente

<u>Ejercicio 3.</u> (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x)=x^3-5x^2+3x$$

a) Calcúlese el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función f(x) y el eje OX.
b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x = 0

Solución:

a) Calculamos los puntos de corte con el eje OX

$$2x^3-5x^2+3x=0\Longrightarrow Ruffini\to x(x-1)(2x-3)=0\Longrightarrow x=0;x=1;x=3/2$$

$$A=\left|\int_0^1(2x^3-5x^2+3x)\,dx\right|+\left|\int_1^{\frac{3}{2}}(2x^3-5x^2+3x)\,dx\right|=$$

$$=\left[\frac{x^4}{2}-5\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x^4}{2}-5\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}\right]_1^{3/2}=\frac{1}{3}+0.05=0.382u^2$$

b) La recta tangente es: $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - (0) = f\,'(0)(x - 0)$$
$$f'(x) = 6x^2 - 10x + 3 \rightarrow f'(0) = 3$$
$$y - 0 = 3(x)$$

La ecuación de la recta tangente es: $y = 3x$

<u>Ejercicio 4.</u> (Calificación máxima: 2 puntos)

En una comunidad de vecinos en el 70 % de los buzones aparece en primer lugar un nombre masculino y en el 30 % restante un nombre femenino. En dicha comunidad, la probabilidad de que un hombre trabaje es de 0'8 y la probabilidad de que lo haga una mujer es 0'7. Se elige un buzón al azar, calcúlese la probabilidad de que el primer nombre en el buzón corresponda a:

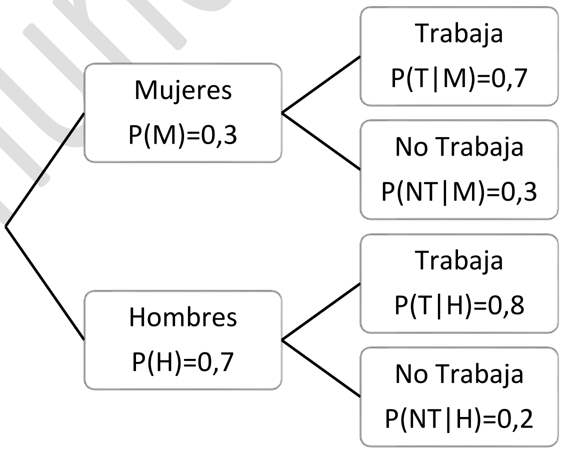
a) Una persona que trabaja.
b) Un hombre, sabiendo que es de una persona que trabaja.

Solución:

Los sucesos que tenemos son:

M: primero mujer
H: primero hombre
T: trabaja
NT: no trabaja

a) Calculamos la probabilidad de que el primer nombre del buzón corresponda a una persona que trabaja



$$P(T) = P(H) \cdot P(T|H) + P(M) \cdot P(T|M) = 0.7 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0.7 = 0.56 + 0.21 = 0.77$$

b) Calculamos la probabilidad de que el primer nombre del buzón corresponda a un hombre, sabiendo que es de una persona que trabaja.

$$P(H|T) = \frac{P(H \cap T)}{P(T)} = \frac{0.7 \cdot 0.8}{0.77} = 0.72$$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El número de descargas por hora de cierta aplicación para móviles, se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ descargas y desviación típica σ= 20 descargas.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 40 horas, obteniéndose una media muestral de 99'5 descargas. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.
b) Supóngase que μ = 100 descargas. Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 horas, la media muestral, X, esté entre 100 y 110 descargas.

Solución:

a) n=40 $\quad z\alpha/_2 = 1.96 \quad$ σ=20 $\bar{X}$=99.5

$$I.C = \left(\bar{X} \pm Z\alpha/_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(99.5 \pm 1.96 \frac{20}{\sqrt{40}}\right) = (99.5 \pm 6.19)$$

b) $N(100{,}20) \longrightarrow N\left(100, \frac{20}{\sqrt{40}}\right) = N(100{,}6.32)$

$$P(\bar{X} \in (100{,}110)) = P(100 < \bar{X} < 110) = P(\bar{X} < 110) - P(\bar{X} < 100) =$$

$$= P\left(Z < \frac{110-100}{6.32}\right) - P\left(z < \frac{100-100}{6.32}\right) = P(Z < 1.58) - P(z < 0) =$$

$$= 0.9429 - 0.5 = 0.4429$$