MATEMÁTICAS II

JUNIO 2018

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos)

Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ -2x-(m+1)y+z = -1 \\ x+(2m-1)y+(m+2)z = 2+2m, \end{cases}$$

Se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro m.
b) (0.5 puntos) Resolver el sistema en el caso de que m = 0.

Solución:

a) Lo primero que haremos es sacar la matriz de coeficientes (que denominaremos como A) y la matriz ampliada (que denominaremos como B).

$$A=\begin{bmatrix} 1 & m & 0 \\ -2 & -(m+1) & 1 \\ 1 & (2m-1) & (m+2)\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 & m & 0 & 1 \\ -2 & -(m+1) & 1 & -1 \\ 1 & (2m-1) & (m+2) & (2+2m)\end{bmatrix}$$

Una vez tengamos ambas matrices, estudiaremos cuando el determinante de A se anula (ya que es la única matriz que es cuadrada).

$$|A|=0\rightarrow\begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ -2 & -(m+1) & 1 \\ 1 & (2m-1) & (m+2)\end{vmatrix}=0\rightarrow$$

$$-(m+1)(m+2)+0+m-0-2m+1+2m^2+4m=0\ \rightarrow$$

$$-m^2-3m-2+m-2m+2m^2+1+4m=0\rightarrow\ m^2-1=0\rightarrow m=\ \pm 1.$$

- Si $m\neq 1$ y $m\neq -1$: rg(A)=rg(B)=3 = nº incógnitas → SCD
- Si m=1:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$|A|=0\rightarrow\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0\rightarrow rg\ (A)=2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix}=0;\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}=4-6+0-1+3+0=\ -2+2=0\rightarrow$$

$$rg(B) \neq 3 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0 \rightarrow rg(B) = 2$$

Como rg(A)=rg(B)= 2< nº incog. → SCI

- Si m= -1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 1 - 0 - 3 + 0 = 4 \neq 0 \rightarrow rg(B) = 3$$

Dado que rg(A) ≠ rg(B) → S.I.

b) Para m = 0, el sistema será el siguiente:

$$\begin{cases} x = 1 \\ -2x - y + z = -1 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

Como ya hemos comprobado en el apartado anterior, el sistema (cuando m = 0) será compatible determinado. Sabiendo que tipo de sistema tenemos, procedemos a resolverlo:
Ya sabemos que x = 1, sustituyendo ese valor en las dos ecuaciones restantes y resolviendo por reducción obtendremos lo siguiente:

$$\begin{cases} -2 - y + z = -1 \\ 1 - y - 2z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -y + z = 1 \\ -y - 2z = 1 \end{cases} \rightarrow \ Solución\ (x, y, z) = (1, -1, 0)$$

Ejercicio 2.(Calificación máxima: 2.5 puntos)

a) (1.5 puntos) En un experimento en un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes: $m_1 = 0.92$, $m_2 = 0.94$, $m_3 = 0.89$, $m_4 = 0.90$, $m_5 = 0.91$.
Se tomará como resultado el valor de x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima. Es decir, el valor para el que la función
$E(x) = (x - m_1)^2 + (x - m_2)^2 + (x - m_3)^2 + (x - m_4)^2 + (x - m_5)^2$ alcanza el mínimo.
Calcule dicho valor de x.
b) (1 punto) Aplique el método de integración por partes para calcular la integral
$\int_1^2 x^2 \ln(x)\, dx$, donde ln(x) significa logaritmo neperiano.

Solución:

a) Dado que me piden calcular el valor del mínimo de la función E(x), haremos el estudio de la primera derivada de dicha función. Igualando a cero la primera derivada, obtendremos los posibles máximos o mínimos. Para poder discernir si esos valores de x que anulan la primera derivada son máximos o mínimos, sustituiremos esos valores de x en la segunda derivada.

La derivada de E(x), es la siguiente:

$$E'(x) = 2(x - m_1) + 2(x - m_2) + 2(x - m_3) + 2(x - m_4) + 2(x - m_5)$$

Sustituyendo los valores e igualando a cero la primera derivada, obtenemos lo siguiente:

$$E'(x) = 2(x - 0.92) + 2(x - 0.94) + 2(x - 0.89) + 2(x - 0.90) + 2(x - 0.91)$$
$$\rightarrow E'(x) = 0 \rightarrow 10x - 9.12 = 0 \rightarrow x = 0.912$$

Este valor de x será un posible máximo o mínimo de la función. Sustituyendo ese valor en la segunda derivada, podremos saber si ese valor de x será máximo o mínimo.

$$E''(x) = 10 \rightarrow E''(0.912) = 10 > 0 \rightarrow x = 0.912 \; es\ un\ mínimo\ de\ E(x)$$

b) Para hacer la integral propuesta, deberemos aplicar el método de integración por partes. En este método debemos buscar u y dv para poder aplicar el "esquema de integración".

$$\int_1^2 x^2 \ln(x)\, dx \rightarrow \begin{matrix} u = \ln(x) \rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx \rightarrow v = \dfrac{x^3}{3} \end{matrix}$$

Operando y sustituyendo, obtengo lo siguiente:

$$\int_1^2 x^2 \ln(x)\, dx = \left[\frac{x^3 \ln(x)}{3}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3x} dx = \left[\frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9}\right]_1^2 = 1.0706\, u^2$$

<u>Ejercicio 3.</u> (Calificación máxima: 2.5 puntos)

Dados los planos $\pi_1 \equiv 4x + 6y - 12z + 1 = 0, \pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0$, Se pide:
a) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.
b) (1.5 puntos) Para el cuadrado de vértices consecutivos *ABCD*, con *A(2,1,3)* y *B(1,2,3)*, calcular los vértices *C* y *D*, sabiendo que *C* pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x - y + z = 2$.

Solución:

a) Se estudia la posición relativa de ambos planos. Planteando las dos matrices M y M´) y determinando sus rangos, vemos que:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -12 \\ -2 & -3 & 6 \end{bmatrix}; M' = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -12 & 1 \\ -2 & -3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -12 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow rg(M) \neq 2 \rightarrow |4| = 4 \neq 0 \rightarrow rg(M) = 1$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -20 + 2 = -18 \neq 0 \rightarrow rg(M') = 2$$

Como rg (M)=1 y rg (M´)= 2 → los planos serán paralelos.

Puesto que los planos son paralelos, la distancia entre ambos planos será el lado del cubo. Por ello, determinaremos un punto de uno de los planos (por ejemplo de plano π_1) y determinaremos la distancia de ese punto al otro plano.
Para determinar un punto del plano, se dan dos valores (arbitrarios) a dos coordenadas, por ejemplo; se supone que las coordenadas y y z son 0, se puede despejar x y obteniendo ya un punto de ese plano.

$$4x + 6 \cdot 0 - 12 \cdot 0 + 1 = 0 \rightarrow x = -{}^{1}/_{4} \rightarrow P_1\left(-{}^{1}/_{4}, 0, 0\right)$$

Una vez calculado el punto P_1 determinado, se calcula la distancia de ese punto al plano π_2.

$$d(P_1, \pi_2) = \frac{|-2x_1 - 3y_1 + 6z_1 - 5|}{\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (6)^2}} = \frac{|-2(-{}^{1}/_{4}) - 0 + 0 - 5|}{\sqrt{49}} = \frac{|{}^{1}/_{2} - 5|}{7} = \frac{9}{14}\,u$$

Esa distancia calculada, corresponde al lado del cubo. De este modo, elevando al cubo ese valor, se obtiene el valor del volumen del cubo.

$$V_{CUBO} = d^3 = \left(\frac{9}{14}\right)^3 = \frac{729}{2744}u^3$$

mundoestudiante

b) Lo primero que haremos es determinar la recta formada por los planos propuestos en el enunciado: (Para pasar la recta de intersección de dos planos a la forma en paramétricas, pasamos z al otro miembro en ambas ecuaciones

$$r \equiv \pi_2 \cap \pi_3 = \begin{cases} -2x - 3y + 6z - 5 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1+3t}{5} \\ y = \dfrac{8t-9}{5} \\ z = t \end{cases}$$

El punto C tendrá esas coordenadas, ya que pertenece a esa recta. Como me dicen en el enunciado, los cuatro puntos, son consecutivos y forman un cuadrado. Lo que haremos será sacar dos vectores (con los puntos A-B y con el B-C) y haremos el producto escalar igualando éste a cero (ya que el ángulo que forman es 90º).

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0); \overrightarrow{BC} = \left(\frac{3t-4}{5}, \frac{8t-19}{5}, t-3\right)$$

Haciendo el producto escalar de ambos e igualando a cero, obtengo lo siguiente:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \rightarrow -\frac{3t-4}{5} + \frac{8t-19}{5} + 0 = 0 \rightarrow t = 3$$

Como tenemos calculado el valor de "t", determino las coordenadas del punto C. El punto C será (2, 3, 3).

Al formar un cuadrado los cuatro vértices, aplicaremos la condición de vectores paralelos, es decir:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \rightarrow (x-2, y-1, z-3) = (1,1,0) \rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \rightarrow x = 3 \\ y - 1 = 1 \rightarrow y = 2 \rightarrow D(3, 2, 3) \\ z - 3 = 0 \rightarrow z = 3 \end{cases}$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos)

El 60% de las ventas en unos grandes almacenes corresponden a artículos con precios rebajados. Los clientes devuelven el 15% de los artículos que compran rebajados, porcentaje que disminuye al 8% si los artículos han sido adquiridos sin rebajas.

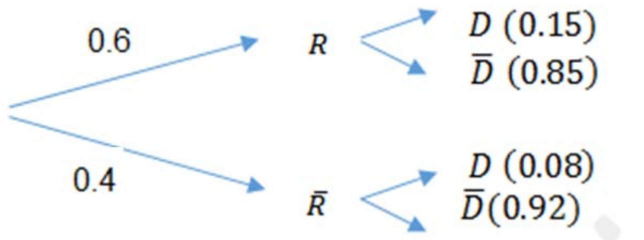
a) (1.25 puntos) Determine el porcentaje global de artículos devueltos.
b) (1.25 puntos) ¿Qué porcentaje de artículos devueltos fueron adquiridos con precios rebajados?

Solución:

a) Plantearemos lo primero de todo el diagrama en árbol para ayudarnos resolver el problema. Los sucesos que tenemos son:

$$R \rightarrow artículos\ rebajados. \bar{R} \rightarrow artículos\ no\ rebajados.$$
$$D \rightarrow (artículos\ devueltos). \bar{D} \rightarrow (artículos\ no\ devueltos).$$

El diagrama en árbol (con los datos del problema), es el siguiente:



Lo que me pide el enunciado, es la probabilidad total de que el artículo sea devuelto. Procedemos a operar del siguiente modo:

$$P(D) = P(R) \cdot P(D/R) + P(\bar{R}) \cdot P(D/\bar{R}) = 0.6 \cdot 0.15 + 0.4 \cdot 0.08 = 0.122 = 12.20\%$$

b) En este caso, lo que está pidiendo el ejercicio es la probabilidad de que sea rebajado sabiendo que el artículo es devuelto:

$$P(R/D) = \frac{P(D/R) \cdot P(R)}{P(R) \cdot P(D/R) + P(\bar{R}) \cdot P(D/\bar{R})} = \frac{0.6 \cdot 0.15}{0.122} = 0.737 = 73.7\%$$

mundoestudiante