mundoestudiante
métodoBarbeito

MATEMÁTICAS II
JUNIO 2018
OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos)

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \ y \ B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto) Obtener los valores del parámetro m para los que la matriz A admite inversa.

b) (1 punto) Para $m = 0$, calcular $A \cdot B \ y \ A^{-1} \cdot B$.

c) (0.5 puntos) Calcular $B \cdot B^t \ y \ B^t \cdot B$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B.

Solución:

a) Para que la matriz admita inversa el determinante debe ser distinto de cero. Calculamos el determinante e igualamos a cero con el fin de obtener los valores que anulan el determinante.

$$|A| = 0 \rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4m - 4 - m^2 = 0 \ \rightarrow m^2 + 4m + 4 = 0$$

$$m = -2$$

- Si $m = 2$, la matriz no tiene inversa.
- Si $m \neq 2$, la matriz tiene inversa.

b) Para calcular la inversa de la matriz hacemos uso de la fórmula $A^{-1} = \frac{(A^t)^*}{|A|}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad |A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \quad \text{y} \quad A^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A^t)^* = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -8 \\ -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ por lo tanto la inversa es } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -{}^1\!/_2 & 2 \\ {}^1\!/_2 & 0 & 1 \\ {}^1\!/_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -{}^{1}/_{2} & 2 \\ {}^{1}/_{2} & 0 & 1 \\ {}^{1}/_{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) $B \cdot B^t = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B^t \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4.$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2.5 puntos)

Dada la función $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de $f(x)$.
b) (0.75 puntos) Calcular $f'(4)$.
c) (1.25 puntos) Hallar el área del recinto limitado por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = -1$.

Solución:

a) Primero expresamos la función sin el valor absoluto:

$$f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}} = \begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+9}} & x < 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} & x > 0 \end{cases}$$

Ahora ya podemos calcular las asíntotas horizontales.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \lim_{x\to\infty} \frac{{}^{x}/_{x}}{\sqrt{{}^{x^2}/_{x^2} + {}^{9}/_{x^2}}} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + {}^{9}/_{x^2}}} = 1 \to y = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2+9}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 + {}^{9}/_{x^2}}} = -1 \to y = -1$$

b) Para este apartado tenemos dos formas de hacerlo. Como se trata de un valor positivo nos quedamos con la función positiva.

- La primera opción es hacer la derivada de la función y sustituir el valor.

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+9} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{(x^2+9)} = \frac{x^2+9-x^2}{\sqrt{(x^2+9)^3}} = \frac{9}{\sqrt{(x^2+9)^3}} \to f'(4) = \frac{9}{125}$$

- La segunda opción es hacerlo mediante la definición de derivada

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{4+h}{\sqrt{(4+h)^2+9}}-\frac{4}{5}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{20+5h-4\sqrt{h^2+8h+25}}{5h\sqrt{h^2+8h+25}}=\frac{0}{0}$$

y aplicando l'hopital y operando tenemos

$$=\lim_{h\to 0}\frac{10\sqrt{h^2+8h+25}-8h-32}{20h^2+120h+250}=\frac{18}{250}=\frac{9}{125}$$

c) Tenemos que separar la integral en dos, la parte positiva y la negativa.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\left|\int_{-1}^{0}\frac{-x}{\sqrt{x^2+9}}dx\right|+\left|\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx\right|=\left|\left[-\sqrt{x^2+9}\right]_{-1}^{0}\right|+\left|\left[\sqrt{x^2+9}\right]_{0}^{1}\right|=$$

$$=0.3245\ u^2$$

<u>Ejercicio 3.</u> (Calificación máxima: 2.5 puntos)

Dados el punto P(1,1,1) y las rectas $r\equiv\begin{cases}2x+y=2\\5x+z=6\end{cases}$, $s\equiv\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1/3}$,se pide:

a) (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta r.
b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s.
c) (0.5 puntos) Hallar el plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto P.

Solución:

a) Ponemos la recta r en paramétricas. $r\equiv\begin{cases}x=\lambda\\y=2-2\lambda\\z=6-5\lambda\end{cases}$, de donde obtenemos el vector director $\vec{u_r}=(1,-2,-5)$ y un punto de la recta $P_r(0,2,6)$. Para calcular la distancia aplicamos la fórmula $d(P,r)=\frac{|P_rP\times u_r|}{|u_r|}$, como $\overrightarrow{P_rP}=(1,-1,-5)$, tenemos:

$$d(P,r)=\frac{|P_rP\times u_r|}{|u_r|}=\frac{|(1,-1,-5)\times(1,-2,-5)|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-5)^2}}=\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{30}}=0.93\ u$$

b) El vector director de la recta s es $\vec{u_s}=(-1,1,1/3)$ y un punto $P_s(2,-1,1)$, además el vector $\overrightarrow{P_rP_s}=(2,-3,-5)$. Estudiamos la posición relativa de r y s haciendo uso de la matriz formada por los vectores directores de las rectas y el vector que une los dos puntos de cada una.

$M=\begin{pmatrix}1&-2&-5\\-1&1&1/3\\2&-3&-5\end{pmatrix}$, y $|M|=\begin{vmatrix}1&-2&-5\\-1&1&1/3\\2&-3&-5\end{vmatrix}=-\frac{1}{3}$, el rango de M=3, es decir, las

rectas se cruzan en el espacio.

c) Como el plano que queremos tiene que ser perpendicular a la recta el vector normal al plano será el mismo que el vector director de s : $\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{u_s} = (-1,1,1/3)$, para calcularlo hacemos uso de la fórmula: $A_1(x - x_1) + B_1(y - y_1) + C_1(z - z_1) = 0$

$$(-1)(x-1) + (1)(y-1) + (1/3)(z-1) = 0 \rightarrow -3x + 3y + z - 1 = 0 \equiv \pi$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos)

En una fábrica se elaboran dos tipos de productos: A y B. El 75% de los productos fabricados son del tipo A y el 25% del tipo B. Los productos de tipo B salen defectuosos un 5% de las veces, mientras que del tipo A salen defectuosos un 2.5% de las veces.

a) (1 punto) Se fabrican 5000 productos en un mes, ¿cuántos de ellos se espera que sean defectuosos?

b) (1.5 puntos) Un mes, por motivos logísticos, se cambió la producción, de modo que se fabricaron exclusivamente productos de tipo A. Sabiendo que se fabricaron 6000 unidades, determinar, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas.

Solución:

a) Denotamos por A al suceso de los productos fabricados del tipo A y por B a los fabricados del tipo B, denotamos por D al suceso de los productos fabricados que son defectuosos. Nos están pidiendo que calculemos el valor que esperamos, es decir, la media. Se trata de una Binomial donde p es la probabilidad de defectuosos. Primero tenemos que calcular la probabilidad de que salgan defectuosos para ello hacemos uso de la probabilidad total.

$$P(A) = 0.75, P(B) = 0.25, P(D \cap A) = 0.025 \; y \; P(D \cap B) = 0.05$$

$$P(D) = (A \cap D) + P(B \cap D) = P(A) \cdot P(D \cap A) + P(B) \cdot P(D \cap B) = 0.03125$$

Así, $p = 0.03125$, n=5000 y la media al ser una binomial es $n \cdot p = 156{,}25 \simeq 157$ productos se espera que sean defectuosos.

b) Ahora se trata de una binomial donde n=6000 y p=0.025, la cual podemos aproximar por una normal tal que así: $B(6000{,}0.025) \simeq N(150{,}146.25)$

$$P(X \geq 160) = P\left(Z \geq \frac{160 - 150}{146.25}\right) = P(Z \geq 0.068) = 1 - P(Z \leq 0.068)$$

$$= 1 - 0.5239 = 0.4761 \rightarrow 47{,}61\%$$

Así se concluye que tenemos un 47.61% de probabilidades de que haya más de 160 unidades defectuosas.