



OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y + az = a + 1 \\ ax + y + z = 1 \\ x + ay + az = a \end{cases}$$

- Discútase el sistema en función de los valores de a.
- Resuélvase el sistema para a = 2.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & (a+1) \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & a \end{pmatrix}$$

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = a + a^3 + 1 - a - a - a^2 = 0 \quad a^3 - a^2 - a + 1 = 0$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1-a & 0 & 1-a \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right|$$

- Para $a \neq -1$ y $a \neq 1$

$Rg(A) = Rg(A^*) = 3 = n^o$ incógnitas \rightarrow Sistema compatible determinado

- Para $a = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$Rg(A)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 ; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 ; |1| = 1 \neq 0 \quad Rg(A) = 1$$

$Rg(A^*)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+2+1-(2+1+1) = 0 ; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1 \neq 0 \quad Rg(A^*) = 2$$

Como $Rg(A) \neq Rg(A^*)$ Sistema incompatible.



- Para $a = -1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Rg (A):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0 \quad \text{Rg (A)} = 2$$

Rg (A^{*}):

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 1 - (-1 + 1) = 0; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 1 - (-1 + 1) = 0; \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 - (-1 - 1) = 0 \quad \text{Rg (A[*])} = 2$$

Como Rang(A) = Rang(A^{*}) < nº de incógnitas Sistema compatible indeterminado.

b)

Para $a = 2 \rightarrow$ S.C.D.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 8 + 1 - (2 + 2 + 4) = 3$$

$$|\Delta_x| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 4 + 2 - (4 + 6 + 2) = 0$$

$$|\Delta_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 8 + 3 - (2 + 2 + 12) = -3$$

$$|\Delta_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 + 12 - (3 + 2 + 4) = 6$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{0}{3} = 0$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{6}{3} = 2$$



Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = -8x^2 + 24x - 10$$

- Calcúlense los máximos y mínimos locales de f y represéntese gráficamente la función.
- Determíñese el área del recinto cerrado comprendido entre la gráfica de la función f y las rectas $x = 1$, $x = 2$ e $y = 4$.

Solución:

a)

$$f'(x) = -16x + 24 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow 16x = 24 \rightarrow x = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

$$f''(x) = -16 < 0 \quad \text{En } x = \frac{3}{2} \text{ hay un máximo}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -8\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 24\frac{3}{2} - 10 = -18 + 36 - 10 = 8$$

En el punto $(3/2, 8)$ hay un máximo.

Representación:

$$V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-24}{-16} = \frac{3}{2} \quad V\left(\frac{3}{2}, 8\right)$$

$$V_y = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = 8$$

Corte eje OX $\rightarrow y = 0$

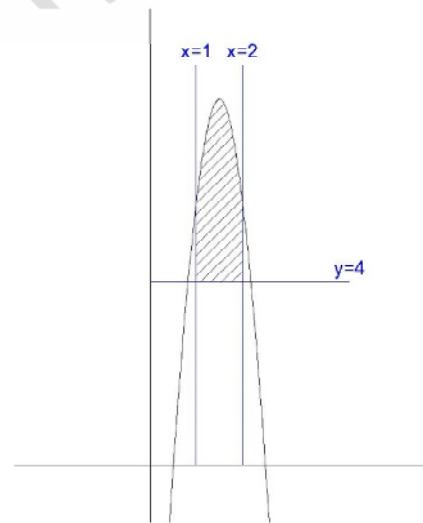
$$-8x^2 + 24x - 10 = 0 \rightarrow -4x^2 + 12x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 80}}{-8} = \frac{-12 \pm 8}{-8} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{-12 + 8}{-8} = \frac{1}{2} \quad \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ x_2 = \frac{-12 - 8}{-8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} \quad \left(\frac{5}{2}, 0\right) \end{cases}$$

Corte eje OY $\rightarrow x = 0$

$$y = -10 \rightarrow (0, -10)$$

b)





$$\int_1^2 [(-8x^2 + 24x - 10) \cdot (4)] dx = \int_1^2 (-32x^2 + 96x - 40) dx = \left[\frac{-8}{3}x^3 + \frac{96}{2}x^2 - 40x \right]_1^2 = \\ \left(\frac{-8}{3} \cdot 2^3 + 12 \cdot 2^2 - 14 \cdot 2 \right) - \left(\frac{-8}{3} + 12 - 14 \right) = \frac{-64}{3} + 20 + \frac{8}{3} + 2 = \frac{-56}{3} + 22 = \frac{10}{3}u^2$$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérese la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^3}{(x-2)^2} + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Estúdiese la continuidad de esta función.
- b) Determíñese las asíntotas de esta función.

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{(x-2)^2} + 1 = \frac{0}{4} + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = e^0 = 1$$

$$f(0) = 1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \rightarrow$ La función es continua en $x = 0$

b)

Asíntotas verticales:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2} + 1 \rightarrow (x-2)^2 = 0 \quad x = 2$$

A.V. en $x = 2$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

A.H. en $y = 0$

Asíntotas oblicuas:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x-2)^2} + 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 - 4x + 4} + 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4x + 4} = \frac{\infty}{\infty} = \infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 + x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4x + 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - 4x + 4}{x^3 - 4x^2 + 4x} = \frac{\infty}{\infty} = 1$$



$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4x + 4} - x \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - 4x + 4 - (x^3 - 4x^2 + 4x)}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 8x + 4}{x^2 - 4x + 4} = \frac{\infty}{\infty} = 5$$

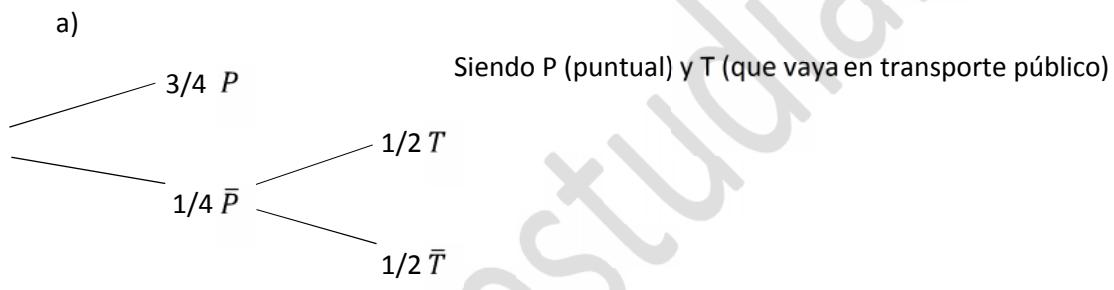
A.O. en $y = x + 5$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

La probabilidad de que un trabajador llegue puntual a su puesto de trabajo es $\frac{3}{4}$. Entre los trabajadores que llegan tarde, la mitad va en transporte público. Calcúlese la probabilidad de que:

- a) Un trabajador elegido al azar llegue tarde al trabajo y vaya en transporte público.
- b) Si se eligen tres trabajadores al azar, al menos uno de ellos llegue puntual. Supóngase que la puntualidad de cada uno de ellos es independiente de la del resto.

Solución:



$$P(\bar{P} \cap T) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

b)

$$P(\text{al menos uno puntual}) = 1 - P(\bar{P} \cap \bar{P} \cap \bar{P}) = 1 - \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64} = 0,98$$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

En cierta región, el gasto familiar realizado en gas natural, medido en euros, durante un mes determinado se puede aproximar mediante una variable aleatoria con una distribución de media μ y desviación típica 75 euros.

- a) Determíñese el mínimo trabajo muestral necesario para que al estimar la media del gasto familiar en gas natural, μ , mediante un intervalo de confianza del 95%, el error máximo cometido sea inferior a 15 euros.
- b) Si la media del gasto familiar en gas natural, μ , es de 250 euros y se toma una muestra aleatoria simple de 81 familias. ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral \bar{X} , sea superior a 230 euros?

Solución:

a)

$$\text{Para un nivel de confianza del } 95\% \quad (1 - \alpha = 0,95 \quad \alpha = 0,05 \quad \frac{\alpha}{2} = 0,025 \quad z_{\alpha/2} = 1,96)$$



$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 15 = 1,96 \cdot \frac{75}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} = \frac{1,96 \cdot 75}{15} \quad n = 9,8^2 = 96,04$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser 97

b)

$$\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(250, \frac{75}{\sqrt{81}} \right) = (250, 8,33)$$

$$P(x \geq 230) = P\left(z \geq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = P\left(z \geq \frac{230 - 250}{8,33}\right) = P(z \geq -2,4) = P(z \leq 2,4) = \mathbf{0,9918}$$