MATEMÁTICAS CIENCIAS

SEPTIEMBRE 2015

OPCIÓN A

Ejercicio 1: Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -mx + my + z = 0 \\ x - my + 3z = 4 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

a) Discutir según los valores del parámetro m.

$$A = \begin{pmatrix} -m & m & 1 \\ 1 & -m & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} -m & m & 1 & 0 \\ 1 & -m & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0 \qquad \begin{vmatrix} -m & m & 1 \\ 1 & -m & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -m^2 - 2 + 6m + 2m - 6m + m = 0$$

$$-m^2 + 3m - 2 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado: $m_1= 2$ y $m_2=1$.

- Si $m \neq 2$ y $m \neq 1$ => rg(A)=rg(A*) = nº de incógnitas => Sistema compatible determinado

- Si $m = 2$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r(A): \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 2 = 8 \neq 0 \quad => r(A) = 2$$

$$\left.\begin{aligned} r(A^*)&: \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0 \\ r(A^*)&: \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -8 + 8 = 0 \end{aligned}\right\} => r(A^*) = 2$$

Como rg(A) = rg(A*) < nº incógnitas => Sistema compatible indeterminado

- Si $m = 1$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(A)$: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4 \neq 0 \quad => r(A) = 2$

$rg(A^*)$: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -8 + 4 = -4 \neq 0 \quad => rg(A^*) = 3$

Como rg(A) ≠ rg(A*) => Sistema incompatible

b) Resolver en caso de m=0.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z=0 \\ x+3z=4 \\ 2x-2y-z=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} z=0 \\ x=4 \\ 8-2y=0\ ;\ y=4 \end{matrix}$$

Solución: (x, y, z) = (4, 4, 0)

c) Resolver en el caso m=2.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x + 2y = -z \\ x - 2y = 4 - 3z \end{cases}$$

-x = -4 z + 4 => x = 4z – 4

-8z + 8 + 2y = -z => 2y = 7z – 8 => y = (7z – 8)/2

Solución: x= 4t -4 ; y = (7t – 8)/2 ; z= t

Ejercicio 2: La recta r pasa por P(2, -1,0) y tiene vector director (1, λ, -2) ; la recta s pasa por Q (1,0-1) y tiene vector director (2,4,2).

a) Calcular λ>0 para que la distancia entre r y s sea $^9/_{\sqrt{59}}$

$$d\ (r,s) = \frac{|\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_r} x\ \overrightarrow{u_s}|}$$

PQ= (-1, 1, -1)

$$|\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -2\lambda - 4 - 4 + 2\lambda - 2 - 8 = -18$$

$$|\overrightarrow{u_r} x\, \overrightarrow{u_s}| = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & \lambda & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (2\lambda+8)\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + (4-2\lambda)\vec{k}$$

$$\frac{9}{\sqrt{59}} = \frac{-18}{\sqrt{(2\lambda+8)^2 + (-6)^2 + (4-2\lambda)^2}}$$

Desarrollando y despejando la ecuación queda:

$$8\,\lambda^2 + 16\lambda - 120 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado se obtiene: $\lambda = 5$

$\lambda = -3$ (solución no válida)

b) Calcula λ para que r sea perpendicular a la recta que pasa por P y Q.

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = (-1,1,-1) \cdot (1,\lambda,-2) = -1 + \lambda + 2 = 0 \qquad => \lambda = -1$$

Ejercicio 3:

a) Estudiar el crecimiento de la función f(x)= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3.

f'(x)= 2 + 6x + 12x^2 => 12x^2 + 6x + 2 = 0

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-96}}{24}$$

f(x) no presenta máximos ni mínimos.

f'(0) = 2 > 0 => f(x) es creciente en todo su dominio.

b) Demostrar que la ecuación 1+2x + 3x^2 + 4x^3 =0 tiene una única solución real y localizar un intervalo de longitud 1 que la contenga.

Teorema de Bolzano:
f(0)=1
f(-1)= 1-2+3-4 =-2
En el intervalo (-1, 0) f(x) tiene una solución real.

Ejercicio 4:

a) Calcular la integral definida $\int_1^4 (1-x)e^{-x}dx$

u= 1-x => du= - dx
dv= e^{-x} dx => v= - e^{-x}

$$\int_1^4 (1-x)e^{-x}dx = \left. -(1-x)e^{-x} - \int e^{-x}\ dx \right]_1^4 = -e^{-x}(1-x) + e^{-x}]_1^4 = x\,e^{-x}]_1^4$$
$$= \frac{4}{e^4} - \frac{1}{e^1} = \frac{4-e^3}{e^4}$$

b) Calcular $\lim_{x\to\infty}(1-x)e^{-x}$ y $\lim_{x\to-\infty}(1-x)e^{-x}$

$$\lim_{x\to\infty}(1-x)e^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}(1-x)e^{-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1-x}{e^x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{e^x} = \frac{-1}{0} = -\infty$$