



Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la matriz:

$$A \begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ -7 & k & k \\ -1 & -1 & k \end{pmatrix}$$

a) Estúdiense para qué valores de k la matriz A tiene inversa

b) Determínese, para $k=1$, la matriz X tal que $X \cdot A = Id$

Nota: Id denota la matriz identidad de tamaño 3×3 .

Solución:

$$A \begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ -7 & k & k \\ -1 & -1 & k \end{pmatrix}$$

a) Para que A tenga inversa, $|A| \neq 0$

$$\begin{vmatrix} k & -1 & 0 \\ -7 & k & k \\ -1 & -1 & k \end{vmatrix} = K^3 - K^2 - 6K = 0 \begin{cases} K = 2 \\ K = 0 \\ K = -3 \end{cases}$$

Solución: La matriz A tiene inversa si $k \neq 3$, $k \neq 0$, $k \neq 2$

b) Para $k=1$,

$$A \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = Id \rightarrow X = A^{-1} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj^t(A) \quad |A| = 1^3 + 1^2 - 6 \cdot 1 = -4$$

$$Adj^t(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } X = A^{-1} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos):

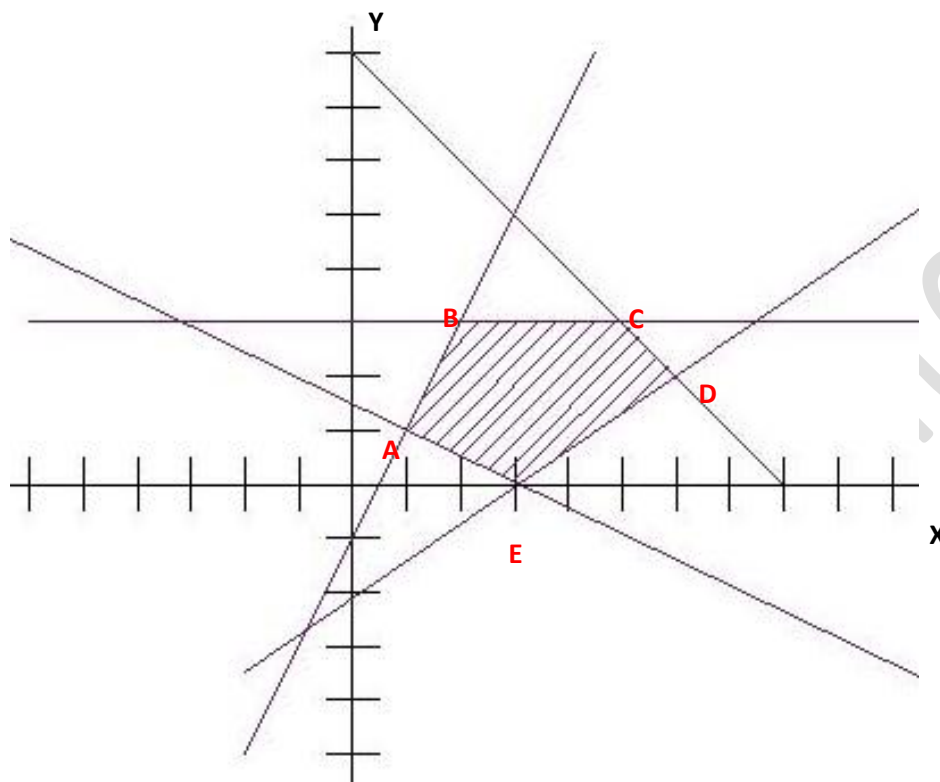
Sea S la función definida por

$$\{ 2x - y \geq 1; \quad 2x - 3y \leq 6; \quad x - 2y \geq 3; \quad x + y \leq 8; \quad y \leq 3 \}$$

- Representétese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
- Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = 2x + y$ en la región S , indicando los puntos en los cuales se alcanzan esos valores máximo y mínimo.



- a) Región S coordenadas de sus vértices.



- b) Valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = 2x + y$ en la región S

$$f(x, y) = 2x + y$$

$$A \rightarrow f(1,1) = 2 * 1 - 1 = 1 \text{ MINIMO EN } (1,1)$$

$$B \rightarrow f(2,3) = 2 * 2 + 3 = 7$$

$$C \rightarrow f(5,3) = 2 * 5 + 3 = 13$$

$$D \rightarrow f(6,2) = 2 * 6 + 2 = 14 \text{ MÁXIMO EN } (6,2)$$

$$E \rightarrow f(3,0) = 2 * 3 = 6$$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1, \\ \frac{ax+b}{x} & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ \sqrt{x^3 + 1} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

- a) Determinense los valores que deben tomar los parámetros a y b para que $f(x)$ sea continua en $x=1$ y $x=2$.
- b) Calcúlese, para $a=4$ y $b=-2$, el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=2$.



a) Valores de a y b para que f(x) sea continua en x=1 y x=2.

Para x=1

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax+b}{x} = a+b \\ f(1) = a+b \end{array} \right\} \text{Para ser continua en } x=1 : \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(x) \rightarrow$$

$$a + b = 2$$

Para x= 2

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ax+b}{x} = \frac{2a+b}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x^3+1} = 3 \\ f(2) = \frac{2a+b}{2} \end{array} \right\} \frac{2a+b}{2} = 3 \rightarrow 2a+b = 6$$

$$\left. \begin{array}{l} a+b = 2 \\ 2a+b = 6 \end{array} \right\} a = 4 \quad b = -2$$

b) Calcúlese, para a=4 y b= -2, el área del recinto acotado por la gráfica de f(x), el eje de abscisas y las rectas x=1 y x=2.

$$\int_1^2 \frac{4x-2}{x} dx = \int_1^2 \frac{4x}{x} dx - \int_1^2 \frac{2}{x} dx = [4x]_1^2 - [2\ln(x)]_1^2 = 4 - 2\ln 2 \quad u^2$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A)=3/4$, $P(A|B)=3/4$ y $P(B|A)=1/4$.

- a) Demuéstrase que A y B son sucesos independientes pero no incompatibles
b) Calcúlese $P(\bar{A}|\bar{B})$

Solución:

a) Dos sucesos son independientes si se cumple que $P(A|B)=P(A)$ y $P(B|A)=P(B)$, de lo que resulta que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Dos sucesos son incompatibles si $P(A \cap B) = 0$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \rightarrow P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \rightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{3/16}{3/4} = \frac{1}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = \frac{3}{16} \\ P(A) \times P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16} \end{array} \right\} \text{se cumple que son sucesos independientes pero no incompatibles}$$

b) Calcular $P(\bar{A}|\bar{B})$



$$P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{\overline{A \cup B}}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{1 - \frac{13}{16}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El tiempo, en minutos, que los empleados de unos grandes almacenes tardan en llegar a casa se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma=5$.

- Se toma una muestra aleatoria simple de 64 empleados y su media muestral es $\bar{x} = 30$ minutos. Determiné un intervalo de confianza al 95% para μ
- ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ c al 99% que tenga una amplitud a lo sumo de 10 minutos?

Solución:

- a) Intervalo de confianza al 95% para la media poblacional. Esta media sigue una distribución normal $N\left(30, \frac{5}{\sqrt{64}}\right)$

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow P\left(Z \leq Z_{\alpha/2}\right) = 0,975 \\ \rightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$IC = \left(\bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(30 \pm 1,96 * \frac{5}{\sqrt{64}}\right) = (28,775; 31,225)$$

- b) Tamaño n de la muestra para un intervalo al 99% con una amplitud de 10 minutos.

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow P\left(Z \leq Z_{\alpha/2}\right) = 0,995 \\ \rightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$$

$$E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 5 = 2,575 * \frac{5}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} = \frac{2,575 * 5}{5} \rightarrow n = 2,575^2 \rightarrow n = 6,63 \sim 7$$