MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
SEPTIEMBRE 2016
OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\begin{cases} (a-1)x & + & y & + & z & = 1 \\ x & + & (a-1)y & + & (a-1)z & = 1 \\ & + & y & + & az & = 1 \end{cases}$$

Se pide:

a) Discútase el sistema según los valores de a.

b) Resuélvase el sistema para a=3

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} a-1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & a-1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \quad A'=\begin{pmatrix} a-1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & a-1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

a) Discutir el sistema:

Rg(A):

$$|A|=\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & a-1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}=(a-1)^2*a+1-[(a-1)^2+a]=a^3-2a^2+a+1-a^2+$$

$$2a-1-a=a^3-3a^2+2a=a(a^2-3a+2)=0\begin{bmatrix} a=0 \\ a=1 \\ a=2 \end{bmatrix}$$

Para a≠2 , a≠ 1 y , a≠ 0 Rg(A) = Rg(B) = nº incógnitas=3 → Sistema Compatible Determinado

a= 0

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A'=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rg(A):

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0;\ \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1\neq 0\ \rightarrow \mathrm{Rg(A)}=2$$

Rg(A'):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -11 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\neq 0\ \rightarrow \mathrm{Rg(A')}=3$$

Rg(A) ≠ Rg(A') → Sistema incompatible.

a= 1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rg(A):

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \ \rightarrow \mathrm{Rg(A)} = 2$$

Rg(A'):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \ \rightarrow \mathrm{Rg(A')} = 2$$

Rg(A) = Rg(A')=2 ≠nº de incógnitas → Sistema compatible indeterminado

<u>a= 2</u>

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A' \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Rg(A):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0; \ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \ \rightarrow \mathrm{Rg(A)} = 2$$

Rg(A'):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \ \rightarrow \mathrm{Rg(A')} = 2$$

Rg(A) = Rg(A')=2 ≠nº de incógnitas → Sistema compatible indeterminado

b) Para a=3 SCD

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ \quad\ \ y + 3z = 1 \end{cases} \mathrm{SCD} \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -2x - 4y - 4z = -2 \\ \quad\ \ y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 0 - 3y - 3z = -1 \\ \quad\ \ y + 3z = 1 \end{cases} \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 0 - 3y - 3z = -1 \\ \quad - 2y + 0 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 1/3 \\ z = 1/3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Solución: (1/3, 0,1/3)

<u>Ejercicio 2.</u> (Calificación máxima: 2 puntos):
Se considera la función real de variable real:

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} x^2 + 2\mathrm{x} & \text{si} \quad \mathrm{x} < 0 \\ -x^2 + 3\mathrm{x} & \text{si} \quad \mathrm{x} \geq 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) Estúdiese la continuidad y derivabilidad de la función.

b) Determínense los valores de $a \in R$ para los cuales la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa x=a es m= -2. Calcúlese para cada valor de a obtenido, la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x=a.

Solución:

a) Continuidad y derivabilidad.

Continuidad: f(x) está formado por funciones continuas; posible discontinuidad en x=0.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 0^-} x^2+2x=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} -x^2+3x=0\\ f(0)=0\end{array}\right\}\text{Es continua en x=0}$$

La función es continua.

Derivabilidad: las funciones de f(x) son derivables, se estudia la derivabilidad en el cambio de función.

$$f'(x)=\begin{cases}2x+2 & \text{si} \quad x<0\\ -2x+3 & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 0^-} 2x+2=2\\ \lim\limits_{x\to 0^+} -2x+3=3\\ f(0)=3\end{array}\right\}\text{No es derivable en x=0}$$

b) Valores de x=a para los que m=-2 y rectas tangentes en esos puntos.

$$f'(x)=-2\rightarrow \begin{array}{l}2a+2=-2\rightarrow a=-2\\ -2a+3=-2\rightarrow a=\dfrac{5}{2}\end{array}$$

Solución: la pendiente es -2 en x=-2 y en x=5/2

Rectas tangentes:

Para x=-2 $\quad y=f(-2)=0\rightarrow y=-2(x+2)$

Para x=5/2 $\quad y=f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{4}\rightarrow y-\frac{5}{4}=-2\left(x-\frac{5}{2}\right)$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x)=\frac{x^2-3}{x^2-9}$$

a) Calcúlense sus asíntotas.
b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

a) Estudio asíntotas
A.V. $x^2-9=0\rightarrow x=\pm 3$

Para x=3

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-3}{x^2-9}=\frac{3}{0^-}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-3}{x^2-9}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

Para x= -3

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{x^2-3}{x^2-9}=\frac{3}{0^+}=-\infty$$
$$\lim_{x\to -3^+}\frac{x^2-3}{x^2-9}=\frac{3}{0^-}=+\infty$$

Hay dos asíntotas verticales, x=3 y x=-3

A.H.

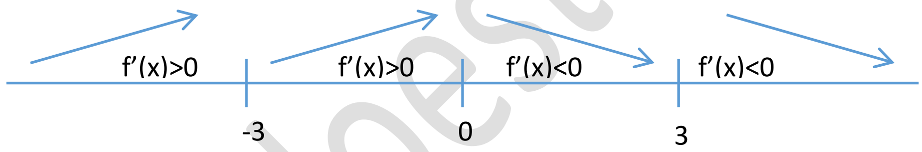
$$\lim_{x\to \infty}\frac{x^2-3}{x^2-9}=1$$
$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-3}{x^2-9}=1$$

Hay asíntota horizontal y=1

b) Crecimiento y decrecimiento.

$$f'^{(x)}=\frac{2x(x^2-9)-2x(x^2-3)}{(x^2-9)^2}=\frac{2x(x^2-9)-2x(x^2-3)}{(x^2-9)^2}=\frac{-12x}{(x^2-9)^2}$$

$$-12x=0\rightarrow x=0$$



Solución: Crece (-∞,-3)U(-3,0). Decrece (0,3)U(3,∞)

<u>Ejercicio 4.</u> (Calificación máxima: 2 puntos)

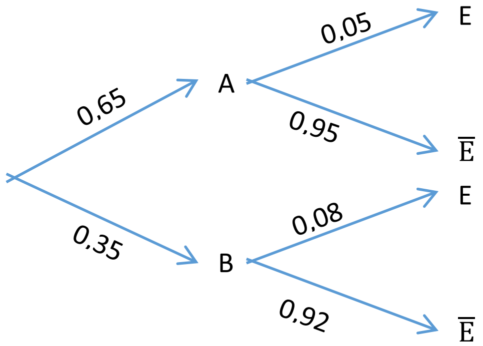
Para efectuar cierto diagnóstico, un hospital dispone de dos escáneres, a los que denotamos como A y B. El 65% de las pruebas de diagnóstico que se llevan a cabo en ese hospital se realizan usando el escáner A, el resto con el B. Se sabe además que el diagnóstico efectuado usando el escáner A es erróneo en un 5% de los casos, mientras que el diagnóstico efectuado usando el escáner B es erróneo en un 8% de los casos. Calcúlese la probabilidad de que:

c) El diagnóstico de esa prueba efectuado a un paciente en ese hospital sea erróneo.
d) El diagnóstico se haya efectuado usando el escáner A, sabiendo que ha resultado erróneo.

Solución:

a) Probabilidad de ser erróneo.

Se define el suceso E=ser erróneo. Como A y B son sucesos incompatibles, se puede usar un diagrama de árbol.



$$P(E) = P(E/A) * P(A) + P(E/A) * P(B) = 0{,}65 * 0{,}05 + 0{,}35 * 0{,}08 = 0{,}0605$$

b) Probabilidad de ser de A sabiendo que es erróneo. Teorema de Bayes.

$$P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}65 * 0{,}05}{0{,}0605} = 0{,}54$$

<u>Ejercicio 5.</u> (Calificación máxima: 2 puntos)
El tiempo, en meses, que una persona es socia de un club deportivo, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica σ=9.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 100personas que han sido socias de ese club y se obtuvo una estancia media de $\bar{x}$=8,1 meses. Determínese un intervalo de confianza al 90% para μ.
b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 144 personas se ha obtenido un intervalo de confianza (7,766;10,233)para μ, determínese el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

Solución:

a) Intervalo de confianza para la media poblacional al 90%

$$1 - \alpha = 0{,}9 \to \alpha = 0{,}1 \to {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}05 \to 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}95 \to P\left(Z \leq Z\alpha_{/2}\right) = 0{,}95$$
$$\to Z\alpha_{/2} = 1{,}645$$

$$IC = \left(\bar{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}\right) = \left(8{,}1 \pm 1{,}645 * {}^{9}/_{\sqrt{100}}\right) = (9{,}58; 6{,}62)$$

b) Nivel de confianza el intervalo (7,766;10,233) para n=144

$$\left.\begin{matrix} 10{,}233 = \bar{x} + Z\alpha_{/2} \dfrac{9}{\sqrt{144}} \\ 7{,}766 = \bar{x} - Z\alpha_{/2} \dfrac{9}{\sqrt{144}} \end{matrix}\right\} Z\alpha_{/2} = 1{,}645 \to NC = 90\%$$