MATEMÁTICAS II
SEPTIEMBRE 2016
OPCIÓN A

**Ejercicio 1.** (Calificación máxima: 3 puntos)

Dada la función $f(x) = (6-x)e^{\frac{x}{3}}$, se pide:

a) (1 punto) Determinar su dominio, asíntotas y cortes con los ejes.
b) (1punto) Calcular su derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.
c) Determinar el área del triángulo que forman los ejes coordenados con la tangente a la curva y=f(x) en el punto x=0.

Solución:

a) **Dominio**:

Dom(f(x)) = $\mathbb{R}$

**Asíntotas**:
- No existen asíntotas verticales.

- Asíntotas horizontales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty}(6-x)e^{\frac{x}{3}} = \infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(6-x)e^{\frac{x}{3}} = 0 \end{array}\right\} Hay\ asíntota\ horizontal\ y = 0$$

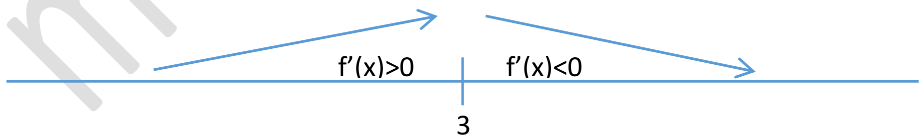
- Como hay asíntota horizontal, no hay oblicua.

- **Cortes con los ejes**.

Corte con el eje x: y=0. $6 - x = 0 \to x = 6 \quad P(6,0)$
Corte con el eje y: x=0. y=6 Q(0,6)

b) Derivada, crecimiento y decrecimiento, extremos relativos.

$$f'(x) = -e^{\frac{x}{3}} + \frac{(6-x)}{3}e^{\frac{x}{3}} = e^{\frac{x}{3}}\left(\frac{(6-x)}{3} - 1\right) \to \frac{(6-x)}{3} - 1 = 0 \to x = 3$$




Solución: Crece (-∞,3). Decrece (3, ∞) máximo en x=3.

c) Recta tangente en x=0 y área del triángulo.

$$x = 0 \to m = f'(x) = 1 \to y = f(0) = 6 \to y - 6 = 1(x-0) \to y = x + 6$$

Área del triángulo= $\int_{-6}^{0}(x+6)dx = [\frac{x^2}{2} + 6x]_{-6}^{0} = 0 - \left(\frac{36}{2} - 36\right) = 18u^2$

**Ejercicio 2.** (Calificación máxima: 3 puntos):

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x-2z-1=0 \\ x+y+z-4=0 \end{cases}$ $y\ s \equiv \{(2+\lambda, 1-3\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$, se pide:

a) (1punto) Obtener la recta que pasa por el punto P(1,0,5) y corta perpendicularmente a r.
b) (1 punto) Obtener el plano que contiene a la recta r y es paralelo a s.
c) (1 punto) Hallar la distancia entre las rectas r y s.

Solución:

a) Recta t que pasa por el punto P(1,0,5) y corta perpendicularmente a r. Q($x_1$,$y_1$,$z_1$)

$$\overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2,-3,1) \qquad \overrightarrow{v_t} = \overline{PQ} = (x-1, y, z-5)$$

Si r y t son perpendiculares, $\overrightarrow{v_r} * \overrightarrow{v_t} = 0 \rightarrow 2(x-1) - 3y + (z-5) = 0 \rightarrow 2x - 2 - 3y + z - 5 = 0 \rightarrow 2x - 3y + z - 7 = 0$ $(1)$ plano que contiene a t y es perpendicular a r

$$Q(x,y,z) \in r \ \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 2z+1 \\ 2z+1+y+z-4=0 \rightarrow y = 3-3z \end{array} \right\} \rightarrow Q(2z+1, 3-3z, z)\ (2)$$

Sustituyendo (2)en(1): $2(2z+1) - 3(3-3z) + z - 7 = 0 \rightarrow 14z - 14 = 0 \rightarrow z = 1$
$x = 3, y = 0, z = 1 \ \rightarrow Q(3,0,1) \rightarrow \ \overrightarrow{v_t} = \overline{PQ} = (3-1, 0, 1-5) = (2,0,-4)$

$$t \equiv \begin{cases} x = 1+2\tau \\ y = 0 \quad \tau \in \mathbb{R} \\ z = 5-4\tau \end{cases}$$

b) Plano que contiene a r y es paralelo a s.

$$\left. \begin{array}{r} \overrightarrow{v_r} = (2,-3,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1,-3,1) \\ P_r = (1,3,0) \\ P_s = (2,1,0) \end{array} \right\} \overrightarrow{n_\pi} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (0,-1,-3) \rightarrow \pi \equiv -y - 3z + D = 0 \rightarrow$$

$-3 - 0 + D = 0 \rightarrow D = 3 \rightarrow \pi \equiv -y - 3z + 3 = 0$

c) Distancia entre las rectas r y s.

$$d(r,s) = \frac{[\overrightarrow{P_rP_S}, v_r, v_s\ ]}{|v_r\ x\ v_s|} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{P_rP_S} = (2,1,0) - (1,3,0) = (1,-2,0) \\ [\overrightarrow{P_rP_S}, v_r, v_s\ ] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 2 + 4 + 3 = 2 \\ |v_r\ x\ v_s| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$d(r,s) = \frac{[\overrightarrow{P_rP_S}, v_r, v_s\ ]}{|v_r\ x\ v_s|} = \frac{2}{\sqrt{10}} u^2$$

**<u>Ejercicio 3.</u>** (Calificación máxima: 2 puntos)

a) (1 punto) Determine, si es posible, los parámetros α y β de modo que se verifique la igualdad:

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

b) (1 punto) Determine los posibles valores de λ para que el rango de la matriz A sea 2, donde

$$A = \lambda\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) Determine α y β

$$\alpha\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3\alpha + \beta = 3 \\ 5\alpha + 4\beta = -2 \\ -4\alpha = -8 \\ 3\alpha + \beta = -5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha = 2 \\ \beta = -3 \end{array}$$

b) λ para que el rango de la matriz A sea 2. Para que rg(A)=0, |A|≠0

$$A = \lambda\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda + 1 & 2\lambda \\ \lambda & 3\lambda + 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = (2\lambda + 1)(3\lambda + 1) - 2\lambda^2$$

$$= 4\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-1}{4}\ y\ \lambda = -1$$

$$Para\ Rg(A) = 2\ , \lambda \neq \frac{-1}{4}\ y\ \lambda \neq -1$$

**<u>Ejercicio 4.</u>** (Calificación máxima: 2 puntos)

Cierta fundación ha destinado 247000 euros para la dotación de 115 becas de estudios. El importe de cada beca es de 3000 euros, si el estudiante cursa un grado universitario; de 2000 euros, si cursa formación profesional y de 1500 euros, si realiza estudios de postgrado. Sabiendo que la fundación ha concedido doble número de becas de formación profesional que de postgrado, ¿cuántas becas ha concedido a cada nivel de estudios?

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 115 \\ 3000x + 2000y + 1500z = 247000 \\ 2y = z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} x + 3y = 115 \\ 3000x + 5000y = 247000 \end{array}\right\} \begin{array}{c} x = 41{,}5 \\ y = 24{,}5 \\ z = 29 \end{array}$$