MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA SEPTIEMBRE 2017
OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x - 2y - z = -2 \\ -2x - az = 2 \\ y + az = -2 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.
b) Resuélvase para a = 4.

Solución:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & a & -2 \end{pmatrix}$$

$|A| = 2 + a - 4a = 2 - 3a;\ |A| = 0 \rightarrow a = \frac{2}{3}$

Si $a \neq \frac{2}{3} \rightarrow$ rango (A) = rango (B) = 3 = nº. incógnitas → Sistema compatible determinado.

Si $a = a = \frac{2}{3}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix};|A| = 0\ ; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \text{rango (A)} = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -\frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -2 \end{pmatrix};\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 2 + 8 = 10 \neq 0 \rightarrow \text{rango (B)} = 3$$

rango (A) ≠ rango (B) → Sistema incompatible

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Regla de Cramer:

$|A| = 2 - 3\cdot 4 = -10$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -16 - 2 - 8 + 16 = -10 \rightarrow \quad x = 1$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 4 - 8 - 16 = -20 \rightarrow \quad y = 2$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 2 + 8 = 10 \rightarrow \quad z = -1$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la región del plano S definida por:
$1 \leq x \leq 5$; $2 \leq y \leq 6$; $x - y \geq -4$; $3x - y \leq 10$.

a) Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
b) Calcúlense los valores máximos y mínimos de la función $f(x,y) = -200x + 600y$ en la región S y obténganse los puntos de S donde se alcanzan dichos valores.

Solución:

a) La gráfica la adjunto en una foto.

Vértices: A(1 , 5); B(1 , 2); C(4 , 2); D(5 , 5); E(5 , 6); F(2 , 6)

b) f(A) = 2800; f(B) = 1000; f(C) = 400; f(D) = 2000; f(E) = 2600; f(F) = 3200

El mínimo se alcanza en C(4 , 2) y su valor es 400.
El máximo se alcanza en F(2 , 6) y su valor es 3200.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{si } x < -1 \\ x^2 + x - 2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

a) Calcúlese el valor del parámetro real a para que f(x) sea una función continua en todo su dominio.
b) Para a = 2, calcúlense los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes cartesianos. Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) Para que sea continua, sus límites laterales deben ser iguales:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} ax + 1 = 1 - a; \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} x^2 + x - 2 = -2$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) \to 1 - a = -2 \to a = 3$$

b) $a = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ x^2 + x - 2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

Eje OX: $2x + 1 = 0 \to x = -\frac{1}{2}$, este punto no es válido ya que no pertenece a $(-\infty, -1)$
$x^2 + x - 2 = 0 \to x = 1$ y $x = -2$, pero $x = -2$ no pertenece a $(-1, +\infty)$
Por tanto, el único punto de corte es: $(1, 0)$

Eje OY: $0^2 + 0 - 2 = -2 \to$ El punto de corte es: $(0, -2)$

Hallamos la derivada de las dos ramas de la función para estudiar la monotonía:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

- $f'(x) = 2 > 0$ para cualquier valor
- $f'(x) = 2x + 1$; $f'(x) = 0 \to x = -\frac{1}{2}$; $f'(x) > 0$ en $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ y $f'(x) < 0$ en $(-1, -\frac{1}{2})$

Por tanto, $f(x)$ crece en $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, +\infty)$ y decrece en $(-1, -\frac{1}{2})$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una empresa fabrica dos modelos de ordenadores portátiles A y B, siendo la producción del modelo A el doble que la del modelo B. Se sabe que la probabilidad de que un ordenador portátil del modelo A salga defectuoso es 0,02, mientras que esa probabilidad en el modelo B es de 0,06. Calcúlese la probabilidad de que un ordenador fabricado por dicha empresa al azar:

a) No salga defectuoso.
b) Sea del modelo A si se sabe que ha sido defectuoso.

Solución:

a) $P(A) = 2P(B)$; $P(A) + P(B) = 1 \to P(A) = \frac{2}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{3}$

$P(NoDef.) = P(A) \cdot P(NoDef/A) + P(B) \cdot P(NoDef/B) = \frac{2}{3} \cdot 0{,}98 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}94 = 0{,}97$

$$P(A) = \frac{2}{3} \rightarrow \begin{cases} P(Def/A) = 0{,}02 \\ P(NoDef/A) = 0{,}98 \end{cases}$$

$$P(B) = \frac{1}{3} \rightarrow \begin{cases} P(Def/B) = 0{,}06 \\ P(NoDef/B) = 0{,}94 \end{cases}$$

b) $P(A/Def) = \frac{P(A)\cdot P(Def/A)}{P(A)\cdot P(Def/A)+P(B)\cdot P(Def/B)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot 0{,}02}{\frac{2}{3}\cdot 0{,}02+\frac{1}{3}\cdot 0{,}06} = 0{,}4$

<u>Ejercicio 5.</u> (Calificación máxima: 2 puntos)

El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica σ= 24 horas. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 16. Calcúlense:

a) La probabilidad de que la media muestral del tiempo, $\overline{X}$, supere las 48 horas, si μ = 36 horas.
b) El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo (24,24 ; 47,76) para μ.

Solución:

a) La distribución de las medias es una normal $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}) = N(36\ ,\ 6)$

$P(\overline{X} > 48) = P\left(\frac{\overline{X}-36}{6} > \frac{48-36}{6}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 0{,}0228.$

b) $\begin{cases} 24{,}24 = \overline{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot 6 \\ 47{,}76 = \overline{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot 6 \end{cases} \rightarrow 23{,}52 = 12\cdot Z_{\frac{\alpha}{2}} \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96 \rightarrow$ Nivel de confianza = 95%