mundoestudiante
métodoBarbeito

MATEMÁTICAS II
CONVOCATORIA ETRAORDINARIA SEPTIEMBRE 2017
OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 3 puntos)

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} xe^{2x} \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

donde ln significa logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función en x=0.
b) (1 punto) Calcular $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to \infty} f(x)$.
c) (1 punto) Calcular $\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

Solución:

a) Una función f(x) será continua en un punto, siempre que sus límites laterales entorno a ese valor de x sean iguales. Para que una función sea derivable en ese punto **debe de ser continua en ese punto y que los límites lateras de las derivadas parciales tiendan al mismo valor.** Teniendo en cuenta eso, estudiaremos ambas en esta función:

Para la continuidad:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} xe^{2x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \frac{\ln 1}{1} = 0$$

Dado que ambos límites tienden al mismo valor, decimos que la función es continua en el punto x=0. Ahora ya que sabemos que la función es continua, estudiaremos la derivabilidad de la función. La derivada de la función será:

$$f'(x) = \begin{cases} (1+2x)e^{2x} \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Una vez tenemos calculada la derivada, calculamos los límites laterales de la derivada entorno a x=0.

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (1+2x)e^{2x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2} = 1$$

Como los límites laterales de la derivada tienden al mismo valor, decimos que la función es derivable. Por lo tanto la función es continua y derivable en x=0.

b)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{2x} = -\infty\cdot 0 \to (\text{aplicamos L´Hopital}) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-2x}} = \frac{\infty}{\infty} \to$$

$$\to (\text{aplicamos L´Hopital}) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-2e^{-2x}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{(x+1)} = \frac{\infty}{\infty} \to (\text{aplicamos L´Hopital}) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 0$$

c) Para hacer esa integral, es necesario emplear el método de integración por partes.

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} xe^{2x}dx = \left[\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}\right]_{-1}^{0} = \frac{3}{4e^2} - \frac{1}{4} = -0{,}1484\ u^2$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 3 puntos)

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} 6x - y - z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} 3x - 5y - 2z = 3 \\ 3x + y + 4z = 3 \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las rectas r_1 y r_2.
b) (1 punto) Calcular la distancia entre las dos rectas.
c) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene r_1 y al punto P(1,2,3).

Solución:

a) Para poder determinar la posición relativa de ambas rectas, necesitamos determinar el vector director y un punto de cada recta. Como cada recta está definida por dos planos, el vector director de la recta lo calculamos como el producto vectorial de los vectores normales de ambos planos. Para determinar el punto damos un valor a una de las incógnitas y resolviendo el sistema obtenemos los otros valores.

Para la recta r_1: $\vec{u} = (-2,-4,-8)$ y $P_1(0,-1,0)$
Para la recta r_2: $\vec{v} = (-18,-18,-18)$ y $P_2(0,-1,1)$

Una vez tenemos los vectores, planteamos dos matrices: la matriz A formada por el vector $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y la matriz B formada por $\vec{u}, \vec{v}$ y $\overrightarrow{P_2P_1}$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -4 \\ -18 & -18 & -18 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -4 \\ -18 & -18 & -18 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rg A: $\begin{vmatrix} -2 & -8 \\ -18 & -18 \end{vmatrix} = 36 - 144 = -108 \neq 0 \to \text{Rg A} = 2$

Rg B: $\begin{vmatrix} -2 & -8 & -4 \\ -18 & -18 & -18 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 36 + 0 + 0 - 0 - 0 - 144 = -108 \neq 0 \to \text{Rg B} = 3$

Como Rg(A)=2 y Rg(B)=3, las rectas se van a cruzar.

b) Para determinar la distancia entre ambas rectas, aplico la siguiente fórmula.

$$d(r_1, r_2) = \frac{|\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{P_1P_2}|}{||\vec{u}, \vec{v}||} = \frac{108}{108} = 1 \text{ u}$$

c) Como r_1 está contenida en el plano π, sabemos que $\vec{u}$ y $\vec{n}$ (vector normal del plano) son perpendiculares. Para poder determinar el vector normal del plano, necesitamos hacer el producto vectorial entre $\vec{u}$ y $\overrightarrow{PP_1}$ (así obtenemos un vector perpendicular a ambos ya que estos dos vectores están contenidos en el plano).

$$\overrightarrow{PP_1} = (-1, -3, -3)$$

$$\vec{n} = |\vec{u} \text{ X } \overrightarrow{PP_1}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -8 & -4 \\ -1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = (-36, -2, -2) = (18,1,1)$$

Como tenemos P y el vector normal ($\vec{n}$), podemos determinar la ecuación del plano. La ecuación del plano será $18x+y+z-23=0$

<u>Ejercicio 3.</u> (Calificación máxima: 2 puntos)

Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta.

	Oro (%)	Plata (%)
A	100	0
B	75	15
C	60	22

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos, con una proporción de 72% de oro y una proporción del 16% de plata, tomando *x* gramos de A, *y* gramos de B y *z* gramos de C. Determínese las cantidades x, y, z.

Solución:

Con los datos que tenemos en la tabla, sabiendo la masa que tenemos que preparar y la composición de ésta; planteamos un sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 25 \\ x + 0{,}75y + 0{,}6z = 18 \\ 0{,}15y + 0{,}22z = 4 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que: x=3 g, y=12 g, z= 10g

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Dados dos sucesos, A y B; de un experimento aleatorio, con probabilidades tales que
$P(A) = \frac{4}{9}, P(B) = \frac{1}{2}$ y $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$
se pide:

a) (1 punto) Comprobar si los sucesos A y B son independientes o no.

b) Calcular $P\left(\frac{\bar{A}}{B}\right)$,donde $\bar{A}$ denota el suceso complementario de A.

Solución:

a) Para comprobar si son independientes o no, lo primero que haremos será calcular $P(A \cap B)$.

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{4}{9} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{18}$$

Comparamos ese valor con P(A)·P(B).

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{9}$$

Como vemos, $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \rightarrow$ decimos que los sucesos son dependientes.

b)

$$P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{9}$$